

10. 單葉函数 = 就テ

檜垣宣明、金岡谷聖次郎 (東北大)

先日檜垣君が私の次ノ様ナ考ヘヨ話サレマシタ、ソレハ單位円ヲソノ内部及ビ周上ニ於テ正則ナ函数ニヨリ一ツノ星型領域ニ描寫シタトキ、ソノ星型領域ノ窪メダクノ數ヲ調ベルコトが出来ナイカラウカト云ツノデスカ此ノ考ヘガ面白カツタノデ一緒ニ考ヘテ居ル中ニ次ノ様ナ一結果ニ到達シマシタ、

$$W = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

ヲ單位円内テ正則テ

$$\frac{f(z)}{z} \neq 0, \quad f'(z) \neq 0$$

ヲアルトシマス、 W 平面ノ原點カラ出ル Radius-Vektor ト $|z| = r$ ($0 < r < 1$)ニ対応スル曲線 C_r ト、交點ニ於ル C_r ノ Normal トソノ Radius-Vektor ノナス角ハ $\text{amp} \frac{zf'}{f}$ テ表ハサレマス、故ニ Radius-Vektor ト Normal ガ重ナル點ハ即チ

$$\text{amp} \frac{zf'}{f} = 0$$

ナル點デス、此ノ稱ナ點ヲ今假ニ C_r ノ頂點ト呼ンテオキマセウ、

$$W = \frac{zf'}{f} = 1 + b_2 z + \dots$$

單位円内テ正則テ 0 ナル値ヲ取リマセン、從ツテ W 平面ニ於ル $|z| = r$ ニ対応スル曲線ハソノ内部ニ $W = 1$ ナル點ヲ含ミ 0、 ∞ ナル點ハソノ外部ニアリマス、故ニ此ノ曲線ト区間 $(0, 1)$ 及ビ $(1, \infty)$ ハ夫々少クとも一處ツツ交點ヲ有シマス、故ニ我々ノ考ヘル $W = f(z)$ ニ對シテハ任意ノ C_r ($0 < r < 1$)ニ對シテ頂點ガ少クともニツアルコトガ分リマス、次ニ $W = f(z)$ ガ如何ナル條件ヲ有スルトキニ任意ノ r ニ對シテ頂點ノ數ガ丁度ニツアルカト云フ問題ニ對シテハ、勿論必要ニシテ且十分ノ條件ハ容易ニ求マラナイデセウガ次ノ稱ナ充分條件モ面白イデセウ、ソレハ $|z| < 1$ ニ対応スル W 平面ニ於ル領域ガ $W = 1$ ニ關スル星型領域ナラバ $|z| = r$

対応スル曲線ト実軸トノ交点ハ下度ニツデスカラ従ツテ γ 上ノ頂点ノ数ハニ
 デアルト云フコトナリマス。コレヲ $f(z)$ ニ對スル條件テ表ハスナラバ

$$R \left\{ \frac{z \frac{d}{dz} \left(\frac{zf'}{f} - 1 \right)}{\frac{zf'}{f} - 1} \right\} = R \left\{ \frac{\frac{zf'}{f} \left(1 + \frac{zf''}{f} - \frac{zf'}{f} \right)}{\frac{zf'}{f} - 1} \right\} > 0$$

トナリマス。尚 $\frac{zf'}{f}$ ガ z ノ実軸上ノ点而シテ実軸上ノ点ニ對シテノ *real*
 値ヲ取ル函数デアルト云フコトが一ツノ十分條件デアルコトモ容易ニ分リマス。
 函数 $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ ハ上ノニ條件ノ孰レニモ適合シテ居マス。又 $f(z) \equiv z$ ニ就
 テハ γ 上ノ点ガ總テ頂点ニナツテ居ルコトモ注意スベキデス。序ニ初ニ考ヘテラ
 ン $f(z)$ ニ更ニ *odd*ト云フ條件ヲ附加セラルト任意ノ γ ニ對シテ頂点ノ数ガ少ク
 モ四ツアルコトモ容易ニ分リマス。次ニ $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$
 ガ單位円内デ正則且單葉ナルトキハ

$$\left| \log \frac{zf'}{f} \right| \leq \log \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

ナル不等式ガ成立スルコトハ H. Grunskyガ彼ノ Dissertationニ證明シテ居ス。
 其處ニハ $|z|=1$ ニ對シテ

$$\log \frac{zf'}{f} = \sigma \log \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

トナル稱ナ凡テノ函数ガ示サレテ居マスカオニイテスルナラバ

$$\text{amp. } \frac{zf'}{f} = \sigma \log \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

トナル稱ナ函数 $f(z)$ モアルケテスカラ

$$\left| \text{amp. } \frac{zf'}{f} \right| \leq \log \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

ナル不等式モ *best possible* ナ一ツデアルコトガ分リマス

以上述べタ事ニ關聯シテ尚種々ノ問題ガ出テ來ルコトト思ハレマスガ今ハ未準
 備中デス。 (12 11 受取)