# 全國紙上数学談話会第23号

## 69. 調和函数ニ関スル二三ノ定理

鍋谷堅次郎（東北大）

先ニ私ハ "Remarks on some theorems concerning sections of a power series I and II" ニ於テ Landau ノ Ergebnisse, 2te Auf. (1929) ノ Erster Kapitel, §1 及ビ §2 ニ於ケル定理ヲ拡張シタ二三ノ定理ヲ与ヘマシタ。コレハ其中東北数学雑誌ニ発表サレルコトト思ヒマスガ，此処デハ Landau ノ本ノ Erster Kapitel ニ於ケル一聯ノ定理ニ並行シテ調和函数ノ方デモ同様ノコトガ成立シマスカラ，ソノ中アマリ注意サレテ居ナイモノヲ述ベテ見タク思ヒマス。

定理 1. $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

ヲ Klass $L^p$ $(p\geq 1)$ ニゾクスル函数 $f(x)$ ノ Fourier series トシ

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),\quad n=0,1,2,\cdots$$

トスルトキハ

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}\right|^p dx\leqq\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx$$

$$p\geq 1,\quad n=0,1,2,\cdots\cdots$$

証明ハ Fourier 級数論ニ於ケル Fejér ノ積分

$$\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}=\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2dt$$

ニ上ニ引用シタ拙論ニ於ケルト同様ノ方法ヲ適用シテ得ラレマス。

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right)^p=\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right)^{p-1}\left(\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\right)\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2dt$$

デスカラ

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right|^p dx=\int_0^{2\pi}\frac{2}{\pi(n+1)}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right)^{p-1}\left(\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\right)\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2 dt\right|dx$$

$$\leqq\int_0^{2\pi}\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\left(\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right)^{p-1}\left(\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\right)\right|\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2 dt\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right|^{p-1}\left|\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\right|dx\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2 dt$$

$$\leqq\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2 dt$$

$$\leqq\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left\{\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(x+2t)}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(x-2t)}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2 dt$$

$$=\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}2\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(x)}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2 dt$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\frac{2}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^2 dt$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum S_\nu(x)\right|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

故ニ

$$\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_\nu(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqq\left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

定理2. $u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)r^n$

ヲ $|z|<1$ $(z=re^{i\theta})$ ニ於ケル調和函数トシ

$$S_n(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu\theta+b_\nu\sin\nu\theta),\quad n=0,1,2,\cdots$$

トスレバ

$$\int_0^{2\pi}\left|S_n\left(\frac{r}{2},\theta\right)\right|^p d\theta\leqq\int_0^{2\pi}|u(r,\theta)|^p d\theta,\quad p>1,\ n=0,1,2,\cdots$$

此定理2, 及ビ次ニ述ベル定理3, 4ノ証明ハココニハ略シマス。ニ
ニ引用シタ拙論或ハLandauノ本ヲ参照サレルト容易ニワカリマス。

定理3 $u(r,\theta)$ヲ前定理ニ於ケルト同様ノ函数ニ更ニ

$$|u(r,\theta)|\leq 1,\quad 0<r<1,\ 0\leq\theta<2\pi$$

$$\mathfrak{M}(r)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)r^n$$

トスレバ $\mathfrak{M}(r)=o\left(\frac{1}{\sqrt{1-r}}\right)$

定理4 $u(r,\theta)$ハ前定理ト同様トシ

$$\mathfrak{M}(r)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta|r^n$$

トスルト $\mathfrak{M}(\vartheta)\leq 1$ ナル如キ $u(r,\theta)$ニ無関係ナ常数$\vartheta$ガ存在シタ. $\vartheta=\frac{1}{3}$
デ之ヨリハ大キク出来ナイ。

次ニ上ニ引用シタ拙論ニ於ケル定理1

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

ヲ $|x|<1$ デ正則トシ $S_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu x^\nu,\ n=0,1,2,\cdots$ トスルトキハ $p\geq 1$ ニ対シテ

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{S_0(x)+\cdots\cdots+S_n(x)}{n+1}\right|^p d\theta\leq\int_0^{2\pi}|f(x)|^p d\theta,\quad x=re^{i\theta},\ n=0,1,2,$$

ニ対シテ私ハ等号ガ成立スルノハ$f(x)$ガ常数ノトキニ限ルコトヲ示シマシタガソノ証明ニ

$$\frac{1}{x^n}(1+x+\cdots\cdots+x^n)^2$$

ガ $|x|=1$ ニ対シテ常ニ一定ノamplitudeヲ有スルト云フ性質ヲ用ヒマシタ。コノ性質ノ証明ヲ二ツ述ベマシタガ何レモ時間不足ノ為

迂遠デアリマシタ。次ノ様ニシタ方ガ適切デアルト思ヒマス。

$$\frac{1}{x^n}(1+x+\cdots+x^n)^2=\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\cdots+1\right)(1+x+\cdots+x^n)$$

$$=\overline{(1+x+\cdots+x^n)}\,(1+x+\cdots+x^n)=\left|(1+x+\cdots+x^n)\right|^2$$

右辺ハrealデスカラ一定ノamplitudeヲモチマス。

(12, 11 受取)

<u>補遺</u> —— 有理型函数ノderivativeニツイテ。 吉田耕作。

21号ノ<u>定理</u>ハ次ノ様ニ拡ゲラレマス。証明略図シマス。

$y=f(x)$ ノ逆函数 $x=g(y)$ ノRiemann面 $F_y$ ニ於テ $|y|<\delta$ ナル円ヲ土カルトキ土カラレタモノガ全テ $y=0$ ノミヲsingularityニスルナラバ

$$\sum\frac{1}{|x_i|^{2+q}\left|\sqrt[n_i]{c_i}\right|^2}=\text{convergent for } q>0$$

但シ $x_1, x_2, \cdots$ ハ $f(x)$ ノ 0-point (without multiplicity

又 $x_i$ ノ近傍ニ於ケルTaylor展開シ $f(x)=c_i(x-x_i)^{n_i}+\cdots\cdots$

$n_i\geqq 0$, $c_i\neq 0$。

之ニヨレバ特別ナ場合ノdomaine de determination 0 de $f(x)$ 内ニ於ケル $f'(x)$ ノ行動($x=\infty$ ノ近傍ニ於ケル)ニツイテノ議論ガデキマス。併シ筆者ノ欲シイノハ一般ニ $F_y$ ノ point transcendent ノ近傍ニ於ケル $f'(x)$ ノ状態ヲ精シク調ベタイノデス。

——正誤——

第23号、69「調和函數ニ關スル二三ノ定理」デハ定理1ノ他ハ全部証明ヲ略シマシタガ、之ハ次ノ機会ニシラベタ文献ノ主ナルモノト併セテ何処カヘ発表スル積リデス。實函數論ノ知識ニ乏シク、又引用シタ"Remarks on some theorems concerning sections of a power series I and II"ニ於テモ、唯Landau ノ本ヲ ergänzen スル意味デ書イタモノデ文献ハ全然アゲマセンデシタ。此ノ論文ノ出来タ動機ハ談話会デ高見稔様ノ代數曲線ニ關スル御研究ヲ伺イテ居ル中ニ拾ッタモノデス。次ニ先日寄稿シタ「星型描寫ニ就テ」ノ中ノ Study ノ定理ノ擴張ニ就テハ淡中君ノ御意見ヲ仰イダコトガアッタコトモ附ケ加ヘネバナリマセン。——鍋谷堅次郎