67 複連結範囲ニ於ケル函数ノ単葉性ニツイテ

尾崎繁雄（東京文理大）

前号ニ於ケル佐藤君ノ御研究ヲ讀ンデ気ノ付イタコトヲ述ベテミタイ

單一閉曲線Cハ平面ヲ二部ニ分ツ、ソノ一方ガ凸範囲デアル場合ニCヲ凸曲線ト呼ビ、又Cガ凸曲線デナクトモ原点ヲ中心トスル三意半径デCヲ反轉シテデキル閉曲線ガ凸デアル場合ニハCヲ反射凸曲線ト呼ブコトニスル。

本紙19号57ノ拙論中デ一寸紹介シタ掛谷先生ノ補助定理ハ次ノ様ニ述ベルコトガデキル。：——

Cヲ正則閉曲線トスル。zガC上ヲ一周スル場合ニ $\operatorname{amp} dz$ 振幅ガ3πヨリ小ナラバCハ單一閉曲線デアル。

コノ事実ヲ用ヒテ次ノ二ツノ補助定理ガ容易ニ得ラレル。(前記拙論参照)

補助定理1. $f(z)$ガ單一正則閉凸曲線C上デ有理型且ココデ $\Re e^{i\alpha}f(z)>0$ (α：実常数)ナラバ$f(z)$ハC上デ正則且單純デアル。

尚コノ場合ニ$f(z)$ニヨルCノ像曲線ヲC'トスレバzガC上ヲ正方向ニ一周スレバ$f(z)$モ亦C'上ヲ正方向ニ一周スルコトガ容易ニワカル。コノ場合ニ$f(z)$ハC上デ正ノ單葉デアルト呼ブコトニス

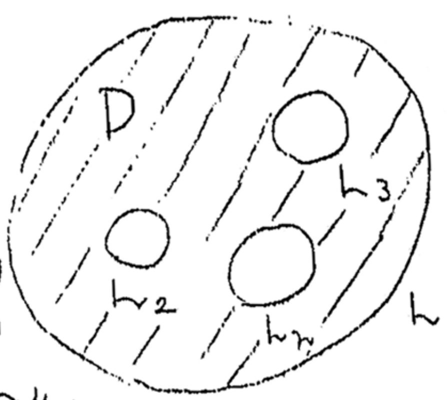
補助定理2. $f(z)$ガ原点ヲトリマク一ツノ單一正則閉反射凸曲線C上デ有理型且ココデ $\Re e^{i\alpha}z^2f'(z)>0$ (α：実常数)ナラバ$f(z)$ハC上デ正則且單葉デアル。

尚コノ場合ニ$f(z)$ニヨルCノ像曲線ヲCトスレバzガC上ヲ

正方向ニ一周スレバ $f(z)$ ハ h 上ヲ負方向ニ一周スルコトガ容易ニワカル。コノ場合ニ $f(z)$ ハ h 上デ負ノ單葉デアルト呼ブコトニスル。

次ノ二ツノ補助定理モ明ナコトデアラウ。

補助定理3　図ニ於テ $h_1, h_2, \cdots, h_n$ ハ何レモ單一正則閉凸曲線, D ハ之等ニヨリ囲マレタ閉範囲トスル。$f(z)$ ガ D 上デ正則且 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ 上デハ何レモ正ノ單葉トスレバ $f(z)$ ハ D 上デ單葉デアル。



補助定理4　図ニ於テ h_1, h_2 ハ何レモ原点ヲ取巻ク單一正則閉反轉凸曲線, $h_3, h_4, \cdots, h_n$ ハ何レモ單一正則閉凸曲線, D ハ之等ニヨリ囲マレタ閉範囲トスル。$f(z)$ ガ D 上デ正則且 h_1, h_2 上デハ負ノ單葉, $h_3, h_4, \cdots, h_n$ 上デハ正ノ單葉ナラバ $f(z)$ ハ D 内デ單葉デアル。

結局次ノ定理ヲ得ル。

定理1　図ニ於テ $h_1, h_2, \cdots, h_n$ ハ何レモ單一正則閉凸曲線, D ヲ之等ニヨリ囲マレタ閉範囲トスル。$f(z)$ ガ D 上デ正則且 $h_\lambda\ (\lambda=1,2,\cdots,n)$ 上デ $\Re\, e^{i\alpha_\lambda} f'(z) > 0$, ($\alpha_\lambda$: 実常数) ナラバ $f(z)$ ハ D 内デ單葉デアル。

定理2.　図ニ於テ h_1, h_2 ハ何レモ原点ヲ取巻ク單一正則閉反轉凸曲線, $h_3, h_4, \cdots, h_n$ ハ何レモ單一正則閉凸曲線, D ヲ之等ニヨリ囲マレタ閉範囲トスル。$f(z)$ ガ D 上デ正則デ且 $h_\lambda\ (\lambda=1,2)$ 上デ $\Re\, e^{i\alpha_\lambda} z^2 f'(z) > 0$ $h_\mu\ (\mu=3,4,\cdots,n)$ 上デ $\Re\, e^{i\alpha_\mu} f'(z) > 0$ ナラバ $f(z)$ ハ D 内デ單葉デアル。

前記佐藤君ノ定理2ハ上ノ定理1ニ含マレル様ニ思フ能代君ノ定理B(18号51)モ勿論上ノ定理1ニ含マレル訳デアル。

[注意] 點z_0ヲ中心トシテ單一閉曲線Lヲ反轉シタ圖形L'ガ凸曲線デアル場合ニハLハz_0ヲ中心トスル反轉凸曲線デアルト云フコトニスル。特ニ$z_0=0$ナル場合ニ略シテ唯反轉凸曲線トモ云フ訳デアル。

定理2ニ於テL_1, L_2ハ何レモ反轉凸曲線デアルコトガ必要デアルガ反轉ノ中心ガ夫々z_1, z_2ヘニアッテモ差支ヘナイ。コノ場合ニハ條件(A)ハ次ノ2條件デオキ換ヘバヨイ。

L_1上デ $\Re\, e^{i\alpha_1}(z-z_1)^2 f'(z)>0$

L_2上デ $\Re\, e^{i\alpha_2}(z-z_2)^2 f'(z)>0$

但シL_1, L_2ハ夫々z_1, z_2ヲ取巻イテ居ルコトガ必要デア

尚之等ノ定理ハ Convex ノ場合ヲ考慮ニ入レレバ尚幾分拡張デキル(拙論。大塚数学会誌0巻1号18頁参照)

(12.3受取)