64　函数方程式 $f(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}f(t)\,dt$ ニ就テ

(阪大) 南雲道夫, 三野良信, 角谷靜夫

任意ノ但シ長サガ一定ナル区間ニ於ケル平均値ガソノ区間ノ中央ノ値ニ等シイ函数ハ何カ?

一次整函数 $f(x)=ax+b$ ハ明カニ上ノ性質ヲモツ。然シ上ノ性質ヲ有スル函数ハ一般ニハ一次整函数トハ限ラナイ。(区間ノ長サガ任意ナラバ勿論一次整函数ニ限ル) 所デ特ニ $f(x)$ ガ $-\infty<x<+\infty$ デ有界トスレバ $f(x)$ ハ常数ナルコトガワカル。コレカラ $f'(x)$ ガ有界ナルトキハ $f(x)=ax+b$ ナルコトガ証明デキル ($f'(x)$ ノ代リ $f^{(p)}(x)$ ガアル p ニ対シテ有界デアッテモヨイ)

[[一般ノ場合]] 区間ノ長サヲ2トスル。$f(x)$ ガ $-\infty<x<+\infty$ 内ノ任意ノ閉区間(有限ナ区間)デ積分可能トスレバ

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

ト置ケバ測度零ノ集合以外デ

(1) $$F'(x)=\frac{F(x+1)-F(x-1)}{2}$$

コトカラ $F(x)$ ガ連續微分可能ナルコト 従ッテ逐次ニ無限回連續微分可能ナルコト (従ッテ $f(x)$ モ無限回連續微分可能) ガワカル。

今 (1) ヲ満足スル任意ノ無限回連續微分可能ナ函数ヲ考ヘレバソノ導函数 $F'(x)=f(x)$ ハ問題ノ函数デアル。(1) カラ又ソノ任意ノ回数微分シタ結果ノ函数モ (1) ヲ満足スルコトガワカル。

(2) $$F^{(k)}(x)=\frac{F^{(k-1)}(x+1)-F^{(k-1)}(x-1)}{2}$$

《定理》 $\Phi(x)$ ヲ閉区間 $-1\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ $(2>\varepsilon>0$; 任意$)$

デ定義サレタ任意ノ無限回連續微分可能ナ函数トスレバ $-1 \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ デ $\Phi(x)$ ト一致シテ $-\infty < x < +\infty$ デ (1) ヲ満足スル様ナ函数 $F(x)$ ガ存在スル。

証明　$F(x)$ ヲ $-1 \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ デ $\Phi(x)$ ト一致シ $1-\varepsilon \leqq x \leqq 1$ デ無限回連續微分可能, $x = 1-\varepsilon$ デハ $F^{(k)}(x)$ ガスベテ $\Phi^{(k)}(x)$ ト一致シ $x=1$ デ

$$\Phi^{(k)}(0) = \frac{F^{(k-1)}(1) - \Phi^{(k-1)}(-1)}{2}$$

ナル様ニ定メレバ (1) ニヨリ $x \leqq -1$ 又ハ $1 \leqq x$ ニ於ケル $F(x)$ ガ一義的ニ自然ニ $-\infty \leqq x \leqq +\infty$ デ (1) ガ成立スル様ニ決定サレル事ガワカル。

故ニ問題ハ二ツノ x ノ値 $x=a, x=b$ $(a<b)$ ニ於テスベテノ微係数ガ豫メ与ヘラレタ値ヲ取ル様ナ無限回微分可能ナ函数ノ存在ヲ証明スレバヨイ。即チ α_k, β_k $(k=0, 1 \quad d$ inf$)$ ヲ与ヘタトキ

$$F(a) = \alpha_0, \qquad F(b) = \beta_0$$
$$F^{(k)}(a) = \alpha_k, \qquad F^{(k)}(b) = \beta_k, \qquad k \geqq 1$$

ナル $F(x)$ ノ存在ヲ証明スレバヨイ。コノ定理ノ証明ハ後ニ発表スル事ニシテ今ココニハ省略スル。

〚$f'(x)$ ガ有界ナル場合〛　(2) カラ若シ $F^{(k)}(x)$ ガ有界即チ $|F^{(k)}(x)| \leqq M$ トスレバ $|F^{(k+1)}(x)| \leqq M$ 従ッテ $|F^{(\nu)}(x)| \leqq M$, $(\nu \geqq k)$ トナル。故ニ $F(x)$ ハスベテノ x ニツキ Taylor 級数ニ展開サレル。

$$F(x) = a_0 + \frac{a_1}{1!}x^1 + \frac{a_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}x^n + \cdots$$

$$|a_n| \leqq M \quad (n \geqq k)$$

$\max(|a_3|, |a_4|, \quad |a_{k-1}|, M) = M_1$ トオケバ

(3) $\quad |a_i| \leqq M_1 \quad i = \cancel{0, 1, 2}, \cdots$ 3, 4, 5,

(2)ニ於テ $x=0$ トオケバ

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k+2n}}{(2n+1)!}, \quad k = 1, 2, \cdots\cdots$$

コレヨリ $\quad \left|\frac{a_{k+2}}{2\cdot 3}\right| \leqq \left|\frac{a_{k+4}}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\right| + \left|\frac{a_{k+6}}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\right| + \cdots$

(3)ヨリ $\quad |a_{k+2}| \leqq M_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n}} = \frac{M_1}{15}, \quad k = 1, 2, 3,$

(3)ニ於テ M_1 ノ代リ $= \frac{M_1}{15}$ ヲ用ヒレバ

$$|a_{k+2}| \leqq \frac{M_1}{15^2},$$

コレヲ繰返セバ

$$|a_{k+2}| \leqq \frac{M_1}{15^\lambda} \qquad k = 1, 2, 3,$$

コレヨリ $\quad a_{k+2} = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \qquad$ (証明終)

[問題] 本問題ニ於テ $f(x)$ ニドノ程度ノ仮定ヲ置ケバ $f(x) = ax+b$ トナルコトガ云ヘルカ。例ヘバ $f(x)$ ガ x ノ解析的整函数ナラバ如何? 或ハ $f(x)$ ガスベテノ実ナル x デ解析的正則ト仮定シタトキ $f(x) = ax+b$ 以外ニ問題ノ性質ヲ有スル函数ガ果シテ存在スルカ?

以上 十一月二十七日.