

全国紙上数学談話会第21号

61. 函数・単葉性 1 佐藤徳意(北大)

能代清氏・御研究ヲ讀ニテ"次ノ様ナモノヲ得マシタ。引用
ハ全ク紙上談話会第18号51・岡氏ノモノヲ"ス。"ツ"定理B
説明ニモアリマス様ニ=微分学ノRolleノ定理カ"複素函数ノ"スキト
ニトニルカヲ示シテ申ス。今之ヲ補キ張シテTaylorノ定理ニスレバ
トシテル。乘利余ヲLagrangeノ"ツ"=本自當スルモノニスルト

定理1. $f(z)$ ハ凸状領域Dヲ"正則"、 $z, a \in D$ トシテ

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \\ + \frac{(z-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left\{ R f^{(n+1)}(a + \theta_1(z-a)) + i \int f^{(n+1)}(a + \theta_2(z-a)) \right\}, 0 < \theta_1, \theta_2 < 1$$

リ。

"次" $f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$ ノ如キ函数ノ單葉性ニツイテ
ハ定理B'カ"原點ヲ中心トスル或円内ノ"トニツイテ示シテ申ス力
造ニ或円ノ領域ニ或カクイタノ所ヲ"次ノ様ニ定理カ"示ハルマシ。

定理2.

$$f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots = \frac{1}{z} + g(z)$$

原點ヲ含ム領域Dヲ"原點ヲ除外"正則"トシ

$$\Re e^{i\omega} g'(z) > \frac{1}{f_2} \quad (\omega \text{ 実定数})$$

カ"成立スル"トシテ" $f(z)$ ハ $\rho < |z| < D$ ヲ"單葉"トシ。

証明ハB'ノ証明ヲ變形スルト出来マス。又図ノ考察ヨリモ"簡
單"ニ申セマス。



この定理より定理Bヲ用ヒテ此ノ結果ニ平行ニ夕モノヲ"スカ"大
 出セル本質ヲ"ス。

更ニコノ考ヘテオ左ヨリ"スルハ"次ノ系ヲ得マス。(何モ $\rho = \rho$ ル
 事ヲ"ハ"ア"マセンカ"簡單ノ為ニ)

$$\text{系。 } f(z) = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

ハ $0 < |z| < \rho$ 内 則 然

$$\operatorname{Re} e^{i\omega} \left(f(z) + \frac{2a_{-2}}{z^3} + \frac{a_{-1}}{z^2} \right) > \frac{2\rho|a_{-2}|}{\rho^4} + \frac{|a_{-1}|}{\rho^2}$$

が成立スルヲ"ハ" $\rho < |z| < \rho$ 内 則 然

(11, 24 復取)