a

57. 單葉函数ニ就テ

尾崎繁雄（東京文理大）

D ヲ有限ナル單一範囲，$\mathfrak{C}$ ヲ D ノ境界ヲ表ハス正則曲線トスル。今 z ガ $\mathfrak{C}$ 上ヲ一周スル場合ニ，$\frac{1}{z}$ ノ画ク曲線ヲ $\mathfrak{C}'$ トシ，シカモ $\mathfrak{C}'$ ノ囲ム範囲ヲ凸ト假定スル。コノ場合ニ $\mathfrak{C}$ ノ囲ム範囲 D ハ必ズシモ凸トハ限ラナイ訳デアルーガ便宜上 D ヲ反転凸範囲ト呼ブコトニスル。シカルトキハ，

定理A. $w=f(z)$ ガ反転凸範囲 D 内デ有理型，且ココデ

$$\Re\left[e^{i\alpha}z^2f(z)\right]>0 \qquad (\alpha:\text{一定実数}) \tag{1}$$

ナラバ $f(z)$ ハ D 内デ單葉デアル。（尚コノトキ原点ハ当然 D 内ニ含マレシカモ一次ノ極点トナル）

証明. $\mathrm{Amp}.\frac{dz}{z^2}=\pi+\mathrm{amp}.d\frac{1}{z}$ ナルコトニ注意スレバ (1) ヨリ

$$\frac{\pi}{2}<\alpha+\mathrm{amp}\,dw-\pi-\mathrm{amp}\,d\frac{1}{z}\leqq\frac{\pi}{2} \tag{2}$$

シカルニ D ハ反転凸範囲デアルカラ，D ニ含マレシカモ D ノ境界ニ十分接近シテ曲線 $\mathfrak{C}$ ヲ画キ $\mathfrak{C}$ ノ囲ム範囲 D' ガ又反転凸範囲デアル様ニ正則曲線ヲ選ブコトガデキル。z ガ $\mathfrak{C}$ 上ヲ正方向ニ一周スレバ $\frac{1}{z}$ ノ画ク曲線 $\mathfrak{C}'$ 凸範囲ヲ囲ムノデアルカラ

$$\beta\leqq\mathrm{amp}.d\frac{1}{z}\leqq\beta+2\pi \tag{3}$$

結局 (2), (3) ヨリ

$$\beta-\alpha+\frac{\pi}{2}<\mathrm{amp}\,dw\leqq\beta-\alpha+\frac{7\pi}{2} \tag{4}$$

$f(z)$ ニヨリ描写サレル D' ノ像ヲ T，ソノ境界ヲ K トスレバ，(4) ニヨリ K 上ニ於ケル $\mathrm{amp}\,dw$ ノ振幅ガ 3π ヨリ小デアル。故ニ掛谷先生ノ補助定理（正則曲線 K ヲ境界トスル單一範囲 T ニ於テ，K 上ニ於ケル $\mathrm{amp}\,dw$ ノ振幅ガ 3π ヨリ小ナルトキハ T ハ單葉デアル（拙論大塚数学会誌第三巻第一号 18頁参照）ヲ用ヒテ，T ガ單葉デアルコトガワカル。從ッテ

$f(z)$ ハ D' 上即チ D 内デ単葉デアル。

尚此ノ定理ヲ掛谷先生ノ流儀ニナラッテ幾分拡張デキルノデアルガ記述ガ繁雑ニナルカラ省略スル（前記拙論参照）

コノ定理ハ明カニ能代氏ノソレト対ニナルモノデアルガ能代氏ノ定理ハ次ノ様ニ述ベタ方ガ幾分一般的デアル。

定理A'. $w=\varphi(z)$ ガ凸範囲 D 内デ有理型デ且ココデ

$$\Re[e^{i\alpha}\varphi'(z)]>0 \quad (\alpha：一定実数)$$

ナラバ $\varphi(z)$ ハ D 内デ正則且単葉デアル。

証明。$\Re[e^{i\alpha}\varphi'(z)]>0$ ナルコトヨリ $\varphi'(z)$ ノ D 内ニ於ケル正則性ガ表ハレル。（∵ $\varphi(z)$ ガ D 内ニ極点 z_0 ヲモッタトスレバ，z_0 ノ近傍ノ z ハ φ' 面上デハ ∞ ノ近傍即チ $|\varphi'(z)|>M$ —— ココニ M ハ充分大ナル常数 —— ヲウツス。従ッテ例ヘバ $\Re[e^{i\alpha}\varphi'(z)]<0$ ナル様ナ z ガ z_0 ノ近傍ニ存在スルコト事ニナリ仮定ト矛盾スル）

従ッテ $\varphi(z)$ モ亦 D 内デ正則トナリ，能代氏ノ定理ヲ応用シテ上ノ結果ヲ得ル。

系。$f(z)=\frac{1}{z}+a_0+a_1z+\cdots\cdots$ ガ $|z|<R$ デ有理型且ココデ

$$\Re\left[e^{i\alpha}\frac{f'(z)}{f(z)^2}\right]>0 \quad (\alpha：一定実数)$$

ナラバ $f(z)$ ハ $|z|<R$ デ単葉デアル。

証明。定理A' ニ於テ $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$ トヲケバ容易ニエラレル。

系 $\varphi(z)=z+b_2z^2+\cdots\cdots$ ガ $|z|<R$ デ有理型且ココデ

$$\Re\left[e^{i\alpha}\frac{z^2\varphi'(z)}{\varphi(z)^2}\right]>0 \quad (\alpha：一定実数)$$

ナラバ $\varphi(z)$ ハ $|z|<R$ デ単葉デアル。

証明。定理 A ニ於テ $f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$ トヲケバ容易ニ得ラレル。

已ニ知ラレテヰル結果ト合セテ次ノ様ニ述ベルコトガデキル。

定理B. $f(z)=\frac{1}{z}+a_0+a_1z+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<R$ ニ於ケル有理型函数トスル。

定理B' $\varphi(z)=z+b_2z^2+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<R$ ニ於ケル有理型函数トスル。

αヲ一定実数トスルトキ$|z|<R$ナル凡テノzニ対シテ次ノ三條件ノ何レカ一ツガ満足サレレバ$f(z)$ハ$|z|<R$デ單葉デアル。

(i) $\Re[e^{i\alpha} z^2 f'(z)]>0$

(ii) $\Re\left[e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]>0$

(iii) $\Re\left[e^{i\alpha}\frac{f'(z)}{f(z)^2}\right]>0$

αヲ一定実数トスルトキ$|z|<R$ナル凡テノzニ対シテ次ノ三條件ノ何レカ一ツガ満足サレレバ$\varphi(z)$ハ$|z|<R$デ單葉デアル。

(i) $\Re[e^{i\alpha}\varphi'(z)]>0$

(ii) $\Re\left[e^{i\alpha}\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right]>0$

(iii) $\Re\left[e^{i\alpha}\frac{z^2\varphi'(z)}{\varphi(z)^2}\right]>0$

特ニ(i),(ii)ノ場合ニハ$\varphi(z)$ハ$|z|<R$正則トナル

〔注意〕定理A及ビA'ガ夫々已ニ知ラレタル次ノ結果ノ拡張デアルコトハ明デアル。

$$f(z)=\frac{1}{z}+a_0+a_1z+\cdots$$

ガ $1\geqq|a_1|R^2+2|a_2|R^3+\cdots+n|a_n|R^{n+1}+\cdots$ ヲ満足スレバ$f(z)$ハ$0<|z|<R$デ正則且單葉デアル。

$$f(z)=z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots$$

ガ $1\geqq 2|b_2|R+\cdots+n|b_n|R^{n-1}+\cdots$ ヲ満足スレバ$\varphi(z)$ハ$|z|<R$デ正則單葉(星型)デアル。

最後ニ前号ニ於ケル能代氏ノ定理B'及ビC'ハ何レモ上記定理A及系ニ含マレルコトヲ附記シマス。

§3 函数ノ多葉性ニ就テIIノ補遺

ゴク大ザッパナ計算ヲスレバ次ノ結果ヲ得ル

定理 $g(z)=z^k+b_{k+1}z^{k+1}+\cdots+b_nz^n+\cdots$ ヲ$|z|<1$ニ於ケル正則k葉函数トスレバ

$$|b_n|<\left(\frac{en}{k}\right)^{2k}$$

証明。 $G(z)=\sqrt[k]{g(z)}=z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots$ ハ$|z|<1$ニ於ケル正則單葉函数トナル。從テ歪ミノ定理ヨリ

$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqq|G(z)|\leqq\frac{|z|}{(1-|z|)^2}$, $\left\{\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\right\}^k\leqq|g(z)|\leqq\left\{\frac{|z|}{(1-|z|)^2}\right\}^k$ 從テコーシーノ係数

[redacted] $|b_n|\leqq\frac{1}{\text{[redacted]}}\,r^k\ldots=\frac{1}{\text{[redacted]}}$ ($r=\frac{n-k}{n+k}$ トオケバ) $=\left\{\left(1+\frac{2k}{n-k}\right)^{\frac{n-k}{2k}}\right\}^{2k}\left(\frac{n+k}{2k}\right)^{2k}<\left(\frac{en}{k}\right)^{2k}$