全国紙上数学談話会第18号

51. 函数ノ単葉性ニ就テ

能代 清（北大）

本会誌第12号，35ニ引キ続イテ解析函数ノ単葉性ニ就テ述ベテ見タイ。前ニDデ正則ナ函数$f(z)$ガ相異ナル$p+1$コノ点$z_1, z_2,$デ同ジ値ヲトルナラバ，凡テノ点z_λ $(\lambda=1,2,\cdots,p+1)$ヲ内部ニ含ム単純ナ閉正則曲線ヲCトシテ

$$\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\cdots(\zeta-z_{p+1})}=0$$

ナコトヨリ複葉性ニ関スル市原氏ノ定理ノ簡単ナ証明ヲ述ベタ。次ニ氏ノ定理ヲ少シク変形シテミヨウ。

巾級数 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_pz^p+\cdots\cdots$

ト同時ニ $\Phi(r)=|a_0|+|a_1|r+|a_2|r^2+\cdots\cdots+|a_p|r^p+\cdots$

ヲ考ヘル。（$\Phi(r)$ヲ$f(z)$ノ優級数ト呼ビ$\Phi=\mathfrak{M}(f)$デ表ハス）

簡単ナ計算デ $\dfrac{\Phi^{(p)}(r)}{p!}=|a_p|+\sum_1^\infty|a_{p+n}|\binom{p+n}{n}r^n$ ナコトヨリ

$\dfrac{\Phi^{(p)}(r)}{p!}-|a_p|<|a_p|$ ナラバ $f(z)$ハ$|z|<r$デ正則且$|z|<r$デ高p一葉トナル。更ニ $\dfrac{\Phi^{(p)}(r)}{p!}-|a_p|$ ガ $\dfrac{f^{(p)}(z)}{p!}-a_p$ ノ優級数デアルコトニ注意スレバ結局氏ノ定理ハ次ノ様ニ述ベラレル。

定理A（市原氏） $f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_pz^p+\cdots$ ガ

$$\mathfrak{M}\left(\frac{f^{(p)}(z)}{p!}-a_p\right)<|a_p|$$

ナラバ，$f(z)$ハ$|z|<r$デ正則且高々p一葉デアル。

ソコデ $\Re\left(\frac{f^{(p)}(z)}{p!}-a_p\right)=\frac{\Phi^{(p)}(r)}{p!}-|a_p|$ ヲ $\left|\frac{f^{(p)}(z)}{p!}-a_p\right|$ デ置キ換ヘタ場合ニコノ定理ハ成立スルデアラウカ。詳シク云ヘバ

予想 A. $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_pz^p+\cdots$ ヲ $|z|<r$ 正則且ツココデ

$$\left|\frac{f^{(p)}(z)}{p!}-a_p\right|<|a_p|$$

ナラバ、$|z|<r$ デ高々 p 葉デアル。

云ッタ様ナ定理ハ得ラレナイデアラウカ。$p=1$ ノ場合ニハ確カニ成立スル。ソレハ前ニ述ベタ

定理 B. $f(z)$ ヲ凸状領域 D デ正則デ且ツココデ

$$\Re(e^{i\alpha}f'(z))>0 \quad (\alpha\ ハ或ル実数)$$

ナラバ、$f(z)$ ハ D デ単葉デアル。

ト云ッタ定理ノ直接ノ結果デアル。ココデ定理 B ノ簡単ナ証明ヲ紹介シ
勿論 $\alpha=0$ ノ時ニ証明スレバ十分デアル。

仮ニ $f(a)=f(b)=A$ トスル。先ヅ線分 $\overline{ab}$ ハ D ニ属スル。明ニ線 $\overline{ab}$ 上ノ点ハ $z=a+(b-a)t,\ 0\leqq t\leqq 1$ ト表ハサレル。

今
$$\Phi(t)=\frac{f(a+(b-a)t)}{(b-a)}=u(t)+iv(t)$$

ト置ケバ $\Phi(0)=\frac{f(a)}{b-a}=\frac{A}{b-a},\quad \Phi(1)=\frac{f(b)}{b-a}=\frac{A}{b-a}$

故ニ $\Phi(0)=\Phi(1)$ 従ッテ $u(0)=u(1)$.

然ルニ $u(t)$ ハ明ニ $0<t<1$ デ微分可能デアルカラ、Rolle ノ定理ニヨリ
$u'(\theta)=0,\ 0<\theta<1$. 又

$$\Phi'(t)=\frac{f'(a+(b-a)t)}{b-a}(b-a)=f'(a+(b-a)t)=u'(t)+iv'(t)$$

デアルカラ $\Re f'(a+(b-a)\theta)=u'(\theta)=0$

之ハ假定ニ反スル。

斯クシテ我々ノ予想ハ $p=1$ ノ場合ニハ正シイコトガワカル。一般ノ場合ハ私ニハ未解決デアル。諸氏ノ御教示ヲ得タイト思フ。

話ハ少シ脱線スルガ、$f(z)$ ガ線分 $\overline{ab}$ ヲ含ム領域デ正則ナルトキ、モシ $f(a)=f(b)$ ナラバ線分 $\overline{ab}$ 上ノ少クトモ一ツノ内点デ $Rf'(z)$ 同様ニ $Jf'(z)=0$ トナル。$Rf'(z)$ ガ 0 ニナル点ト $Jf'(z)=0$ トナル点トガタマタマ一致スレバソコデ $f'=0$ トナル訳デアル。故ニ複素函数デハ Rolle ノ定理ガ巧ク行カナイ。領域 D デ $f(z)$ ガ正則ナトキ、相異ナル二点デ同ジ値ヲトツタカラトミツテ D ニ於テ $f'(z)$ ガ 0 一点ヲモツトハ限ラナイ。コノコトハ e^z ヲ考ヘテモワカル。處ガ陳建功氏ハ「$f(z)=z+\cdots$ ガ $|z|<R$ デ正則且ツココデ $f'(z)\neq 0$ ソノ上ニ $\left|\frac{f(z)}{z}-1\right|<1$ トスレバ $f(z)$ ハ $|z|<R$ デ單葉デアル」ト云フ結果大学士院記事 IX (1933), p. 465-467 デ発表サレテ居ル。之ヲ少シ変形スレバ $f(z)=z+\cdots$ ガ $|z|<R$ デ正則デ且 $\left|\frac{f(z)}{z}-1\right|<1$ トスル。コノ時モシ相異ル二点デ同ジ値ヲトツタトスレバ、$f'(z)$ ハ $|z|<R$ 内ニ必ズ 0 一点ヲモツ。

ト云フコトニナル。陳建功氏ノ此ノ結果ハ大変面白イト思ヒ、自分デ証明ヲ試ミテミタガ成功シナイ。尚ホ陳氏ノ上記論文ニハ証明ガ見当ラナイ様ニ思フ。之モ諸氏ノ御教示ヲ得タイト思フ。

次ニ函数ノ單葉性ノ理論デ屡々 $0<|z|<R$ デ正則ナ

$$f(z)=\frac{1}{z}+a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdot$$

ヲ考ヘル。此ノ方面ノ研究ニハ尾崎氏ノ興味アル論文（文理科紀要，II，1934，p.41–55）ガアル。

$$G(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdot$$

トシタ。$f(z)$ ガ相異ナル $p+1$ コノ点 z_ν $(z_\nu\neq 0)$ デ同ジ値ヲトッタトスル。ソノ時凡テノ z_ν ヲ内部ニ含ム同心円ヲ C トスレバ，

$$\frac{(-1)^{p+1}}{z_1z_2\cdots z_{p+1}}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{G(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\cdots(\zeta-z_{p+1})}$$

ガ成立スル。故ニ $|z_\nu|$ ノ最大ヲ ρ トスレバ

$$1\leqq\sum_0^\infty|a_{p+n}|\binom{p+n}{n}\rho^{n+p+1}$$

（ココノ議論ハ拙論，12号，35ト全ク同様）

従ッテ市原氏ノ定理ニ対応スル尾崎氏ノ定理ヲ得ル。

定理 A′（尾崎氏） $f(z)=\frac{1}{z}+a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_pz^p+\cdots\cdot$ ガ

$$1>\sum_0^\infty|a_{p+n}|\binom{p+n}{n}r^{p+n+1}\quad\cdots\cdot\quad(1)$$

ナラバ $f(z)$ ハ $0<|z|<r$ デ正則且ツココデ高々 p 葉デアル。

(1) ノ右辺ハ $\mathfrak{M}\left(\frac{z^{p+1}f^{(p)}(z)}{(-1)^p p!}-1\right)$ ナルコトニ注意スレバ，(1) ノ右辺ヲ $\left|\frac{z^{p+1}f^{(p)}(z)}{(-1)^p p!}-1\right|$ デ置キ換ヘルコトガ出来ナイデアラウカトイフ問題ガ同様ニ起ッテクル。之ハ $p=1$ ノ場合ハ肯定的デアル。即チ

定理 B′. $f(z)=\frac{1}{z}+a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_pz$

ヲ $0<|z|<R$ デ正則且ツココデ

$|z^2 f'(z)+1|<1$ トスレバ $f(z)$ ハ $|z|<R$ デ單葉デアル。

證明。$G(z)=f(z)-\frac{1}{z}$ トシケバ、$G(z)$ ハ $|z|<R$ デ正則デアル
今 $\neq 0$ ナル相異ナル二点ヲ z_1, z_2 トシ、z_1 ト z_2 トシ内部ニ含ム同心円 $C: |z|=\rho$ ヲ画ケバ z_1 ト z_2 ヲ結ブ線分 d ハ C 内ニ在ル。d 上ニ於ケル $|G'(z)|$ ヲ調ベルト

$$|G'(z)|=\left|f'+\frac{1}{z^2}\right|=\left|\frac{z^2f'+1}{z^2}\right|<\frac{1}{\rho^2}$$

正則函数ハ Minimum ヲ境界デトル)

扨テ $f(z_2)-f(z_1)=\left[\frac{1}{z_2}+G(z_2)\right]-\left[\frac{1}{z_1}+G(z_1)\right]=\frac{z_1-z_2}{z_1z_2}+[G(z_2)-G(z_1)]$

$$=\frac{z_1-z_2}{z_1z_2}+\int_{z_1}^{z_2}G'(z)\,dz$$

積分路ニ z_1 ト z_2 トヲ結ブ線分 d ヲトレバ

$$|f(z_2)-f(z_1)|\geq\left|\frac{z_1-z_2}{z_1z_2}\right|-\left|\int_{z_1}^{z_2}G'(z)\,dz\right|>\frac{|z_1-z_2|}{\rho^2}-\int_0^{|z_1-z_2|}|G'(z)||dz|$$

$$>\frac{|z_1-z_2|}{\rho^2}-\int_0^{|z_1-z_2|}\frac{|dz|}{\rho^2}=\frac{|z_1-z_2|}{\rho^2}-\frac{|z_1-z_2|}{\rho^2}=0$$

注意. 定理 B′ ハ定理 B ノ系デアル。

$f(z)=z+\cdots\cdots$ ガ $|z|<R$ デ正則且ココデ $|f'(z)-1|$ ナラハ

$f(z)$ ハ $|z|<R$ デ單葉デアル

トミフ定理ニ相当スルモノデアル。

次ニ定理 B′ ノ一応用ヲ述ベル。$f(z)=z+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<R$ デ meromorphic 且ツ $0<|z|<R$ デ $f(z)\neq 0$ トスル。コノトキ $g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{z}+\cdots\cdots$ ハ $0<|z|<R$ デ正則トナル。今 $z^2g'(z)+1=1-z^2\frac{f'(z)}{f(z)^2}$ ヨ

$$\left|z^2\frac{f'(z)}{f(z)^2}-1\right|<1 \qquad (|z|<R)$$

ナル條件ヲ與ヘレバ前定理ニ依リテ $f(z)$ ハ $|z|<R$ デ單葉デアル
從ツテ次ノ定理ガ得ラレル。

定理 C'. $f(z)=z+\cdots$ ヲ $|z|<R$ デ meromorphic 且ツ $0<|z|<R$ デ $f(z)\neq 0$ トスル。コノトキ

$$\left|\frac{z^2 f'(z)}{f(z)^2}-1\right|<1 \qquad (|z|<R)$$

ナラバ $f(z)$ ハ $|z|<R$ デ單葉デアル。

注意 $f(z)=z+\cdots$ ヲ $|z|<R$ デ holomorphic 且 $0<|z|<R$ デ $f(z)\neq 0$ トスル。コノトキ

$$\Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)>0 \quad \text{又ハ} \quad \left|z\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right|<1$$

ナラバ $f(z)$ ハ $|z|<R$ デ單葉（實ハ星型）デアル。
トイフヨク知ラレタ定理ニ相當スルモノデアル。

(11. 4)