50. Stone ノ一定理ノ別証明

北川敏男（阪大）

1. H. Stone ハ Sur deux systèmes d'eq. fonctionnelles (Bulletin S. M. F. 54 II) ニテ、

実変数ノ函数 $f(x)$ ガ 互ニ incommensurable ナ二ツノ period ヲモテバ

(i) $f(x)$ ガ non-mesurable デアルカ

(ii) 然ラザレバ、presque partout デ 0 ニナル函数ト const トノ和デアル

トイフコトヲ証明シタ。スレバ、サモアリソウナコトデ、証明モ極メテ簡単ナコトデアルカラ、以下ノベヤウト思フ証明ガ決シテヨリヨイトカトイフ意味デナク、タダカウシテモ出来ルトイフ意味デ書イテミマス。

2. Sierpinski ノ結果ヲ拡張シテ、Steinhaus ハ Fund. Math. 1 デ

一次元集合 A, B, C ガアッテ $mes A > 0$, $mes B > 0$, C … 到ルトコロテ dense ナ集合トスレバ

$$a \in A, \quad b \in B \text{ ナル } a, b \text{ ヲ適当ニトッテ } \rho(a, b) \in C \text{ ナラシメ}$$

ウル、—— トイフ事ヲ示ッテ居ル。

3 2ヲ用ヰルト 1ハ容易ニ示サレマス

$$f(x+\omega) = f(x), \qquad f(x+\omega') = f(x) \qquad \omega, \omega' \dots \text{ 互ニ incommensurable}$$

デスカラ、modul $\{m\omega + n\omega'\}$ ハ直線上デ到ルトコロデ dense デス

ソレ故ニ、$f(x)$ ガ mesurable トテ

$$A = \underset{x}{E}\left(f(x) \geq k\right), \quad B = \underset{x}{E}\left(f(x) < k\right) \text{ トスレバ}$$

$mes A > 0$ 而モ $mes B > 0$ トイフコトハ成立シナイ。ソウダトスレバ

$$a \in A \quad b \in B \qquad a - b = m_1\omega + n_1\omega' \text{ ナル } m_1, n_1 \text{ ガアッテ}$$

$$f(a) = f(b + m_1 a + n_1 \omega') = f(b) \quad (\text{矛盾}).$$

コレハ任意ノ数 k ニ対シテイヘルコトデスカラ、証明ヲリマス。

（9. 11. 1）