全國紙上数学談話会才17号

48. Primäre Integritätsbereiche ニ就テ (II) (Krull 定理ノ別証)

秋月康夫 (三高)

本紙上談話会才14号ニ Krull ノ次ノ定理ノ (ii) ノ部分ノ別証ヲ申シ述ベマシタガ ソノ際 (i) ノ部分ノ才ハ私ノ初等的ナ方法デハ証明セラレサウニナイト申シマシタ. 併シソノ後考ヘマシタ所次ノ様ニスルトソレモ簡単ニ証明出来ルト思ヒマス.[1]

Krull ノ定理 [Ein Satz über primäre Integritätsbereiche, Math. Ann. 103] 用ヒ申シマスト、

$\mathfrak{R}$ ノ、ソノ Nullideal ヲ除イテ Doppelkettensatz ノ成立スル Primärintegritätsbereich, $\mathfrak{O}$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ Quotientenkörper K ノ内ノ $\mathfrak{R}$ ニ関シテノ algebraisch ganz-abgeschlossener Ring トスレバ, (i) $\mathfrak{O}$ ニ於テハヤハリ (0) ヲ除ケバ Doppelkettensatz ガ成立シ, ソノ Primideals ハ凡テ teilerlos (即チ maxim) デアッテ有限個ヨリナイ. (ii) $\mathfrak{R}$ ノ $\mathfrak{p}$-adisch abgeschl. Ring $\mathfrak{R}^*$ ガ nilpotentes Element ヲ有レナイ時ソノ時ノミ $\mathfrak{O}$ ハ endlicher $\mathfrak{R}$-Modul デアル. ココニ $\mathfrak{p}$ トハ $\mathfrak{R}$ ニ於ケル (0) 及 $\mathfrak{R}$ ト異ル唯一ツノ Primideal ヲ意味シマス.

以下 (i) ノ部分ノ別証ヲ考ヘテミマス. Krull ト同ジ様ニシテ (loc. cit. S. 459) トッテ p ヲ $\mathfrak{p}$ ノ一ツノ任意ノ Element トスレバ K ノ要素ハ凡テ $\frac{\rho}{p^i}$ ($\rho \in \mathfrak{R}$) ナル形ニ表ケレバ サラニ i ヲ定メテオイテ $\frac{\alpha}{p^i} \in \mathfrak{O}$ ($\alpha \in \mathfrak{R}$) ナル様ナ $\frac{\alpha}{p^i}$ ノ集合ヲ $\mathfrak{O}_i$[2] トル.

---

(1) Krull ハ上記ノ論文ノ Einleitung デ今ノ所 $\mathfrak{p}$-adische Hilfsmittel ニ依ラ非レバ上定理ハ証セラレサウモナイト書イテ井マス. 以下ノ証明ニハ $\mathfrak{p}$-adische Hilfsmittel ハ用ヒテアリマセン.

(2) 前出論文デハコレヲ $\mathfrak{M}_i$ デ示シマシタガ, 今又 Krull ニ従ッテコレヲ $\mathfrak{O}_i$ デ示シマス.

$\frac{\alpha}{p^i} \in \mathfrak{o}_i$ ナル様ナ $\alpha\ (\in \mathfrak{R})$ ノ集合ヲ $\mathfrak{q}_i$ デ示ス。($\mathfrak{q}_i$ ハ勿論 $\mathfrak{R}$-Ideal ヲ作ル

然ルトキハ $\mathfrak{o}_0 = \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{o}_1 \subseteq \mathfrak{o}_2 \subseteq \cdots\cdots \to \mathfrak{o}$

$$\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{R} \supseteq \mathfrak{q}_1 \supseteq \mathfrak{q}_2 \supseteq \cdots$$

デアリ、又明カニ $p\mathfrak{q}_i \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_{i+1})$ デアル。

而シテアル k デ $p\mathfrak{q}_k = \mathfrak{q}_{k+1}$ ナラバ凡テノ $j \geqq 1$ ニ対シテ $\mathfrak{q}_{k+j} = p\mathfrak{q}_{k+j-1} = \cdots = p^j\mathfrak{q}_k$ デアル。何レナラバ $\mathfrak{q}_{k+1} = p\mathfrak{q}_k$, $\mathfrak{q}_{k+1} \subseteq \mathfrak{q}_{k+1}$ 故 $\mathfrak{q}_{k+2}$ ノ任意ノ Element q_{k+2} ヲトルト $q_{k+2} = pq_k \ (q_k \in \mathfrak{q}_k)$ ヨリテ、

$$\frac{pq_k}{p^{k+2}} = \frac{q_{k+2}}{p^{k+2}} \in \mathfrak{o}, \text{ ヨリテ } \frac{q_k}{p^{k+1}} \in \mathfrak{o} \quad \therefore\ q_k \in \mathfrak{q}_{k+1} \quad \therefore\ \mathfrak{q}_{k+2} \equiv 0\ (p\mathfrak{q}_{k+1})$$

ヨツテ Induction デ証明スレバヨイ。

ヨリノアルトデ $p\mathfrak{q}_k = \mathfrak{q}_{k+1}$ トナル時ハ $\mathfrak{o}_k = \mathfrak{o}_{k+1} = \cdots = \mathfrak{o}$ トナリテ $\mathfrak{o}$ ハ $\mathfrak{R}$-Modul トシテ有限デアル。従ツテ Noether ノ定理 (Abstrakter Aufbau der Idealtheorie, Math. Ann. Bd. 96 §2) ヨリ $\mathfrak{o}$ デハ (i) ガ成立スル。

ソコデ問題トナルノハドノ様ニ k ヲ大キクトツテモ $p\mathfrak{q}_k = \mathfrak{q}_{k+1}$ トハナラナイ(即チ $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{R} : \mathfrak{o} = (0)$ ナル場合) 或ハ $\mathfrak{R}$ ヨリ $\mathfrak{o}$ ニ到ル Ringkette ガ無限ニ多クノ項ヨリナル時ニモ (i) ガ成立スルカト云フコトデアル。サテ今倍鎖列 ((p) ヲ含ム) $(p, \mathfrak{q}_1) \supset (p, \mathfrak{q}_2) \supset \cdots$ デ終ル所ヲ $(p, \mathfrak{q}_i) = (p, \mathfrak{q}_{i+1}) = \cdots$ トスル。ソシテ

$$\mathfrak{q}_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots\ldots, \alpha_{j m_j}, p\mathfrak{q}_{j-1}) \qquad \frac{\alpha_{je}}{p^j} = \omega_{je}$$

スレバ $\mathfrak{o} = \mathfrak{R}[\omega_{11}, \ldots, \omega_{1m_1};\ \omega_{21}, \ldots \omega_{2m_2}, \ldots\ldots \to \text{無限}]$

アル所デ $\mathfrak{q}_{i+k} \equiv 0\ (p, \mathfrak{q}_{i+k-1})$ ナル故

$$\alpha_{i+k\,l} = p\rho - \beta_{i+h+1} \quad (\text{コヽニ } \rho \in \mathfrak{R},\ \beta_{i+h+l} \in \mathfrak{q}_{i+h+1})$$

$$\therefore \quad \omega_{i+k,l} = \frac{\rho}{p^{i+k-1}} + p\,\frac{\beta_{i+k+1}}{p^{i+k+1}}$$

然ルニ $\omega_{i+k,l}\in\mathfrak{O}$ $\frac{\beta_{i+k+1}}{p^{i+k+1}}\in\mathfrak{O}$ ナル故 $\frac{\rho}{p^{i+k-1}}\in\mathfrak{O}$、従ッテ $\rho\in\mathfrak{q}_{i+k-1}$

故ニ $$\omega_{i+k,l}=\sum_{\mu\nu}^{i+k-1}\xi_{\mu\nu}\,\omega_{\mu\nu}+p\,\omega \quad \text{für } k\geq 0 \quad \text{------} \ (1)$$

デアル。コヽニ $\xi_{\mu\nu}\in\mathfrak{R}$, $\omega\in\mathfrak{O}$ デアル。所ガ $\mathfrak{q}_{i+k}\neq p\,\mathfrak{q}_{i+k-1}$ デアルカラ $\mathfrak{O}\neq\mathfrak{O}_{i+k-1}$ デアル。上ノ関係式(1)ヨリ

$$\mathfrak{O}=[\mathfrak{R},\omega_{11},\dots,\omega_{1m_1};\dots;\omega_{i-1,1},\dots,\omega_{i-1,m_{i-1}},\mathfrak{p}\mathfrak{O}] \quad \cdots (2)$$

ガ成立スル。サテ Restklassenring $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}\mathfrak{O}$ ハ $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ ニisomorph ナ体 L ヲ含ムガ(2)ヨリ $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}\mathfrak{O}$ ハ L-Modul トシテ有限ナルコトヲ知ル。

次ニ Modulsumme $\mathfrak{R}+\mathfrak{p}\mathfrak{O}=\overline{\mathfrak{R}}$ ヲトルト $\overline{\mathfrak{R}}$ ハ明カニ Ring ヲ作ル。而シテ $\overline{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}\mathfrak{O}$ ハ $\overline{\mathfrak{R}}$ ニ於テ teilerlos 従ッテ Primideal デアル。
(∵ $[\mathfrak{R},\overline{\mathfrak{p}}]=\mathfrak{p}$ 故 $\overline{\mathfrak{R}}/\overline{\mathfrak{p}}\cong\mathfrak{R}/\mathfrak{p}\cong L$.)

$\overline{\mathfrak{a}}$ ヲ一ツノ $\overline{\mathfrak{R}}$-Ideal トスレバ $[\overline{\mathfrak{a}},\mathfrak{R}]=\mathfrak{a}\neq 0$ デアル。∵ $\overline{\alpha}\in\overline{\mathfrak{a}}$ ($\overline{\alpha}\neq0$) トスレバ $\overline{\alpha}=\frac{\alpha_k}{p^k}$, $\alpha_k\in\mathfrak{R}$ 故 $p^k\overline{\alpha}\in\mathfrak{R}$ 且 $\in\overline{\mathfrak{a}}$、∴ $\mathfrak{a}\neq0$

而シテ $\overline{\mathfrak{a}}=\overline{\mathfrak{a}}\,\overline{\mathfrak{R}}=\overline{\mathfrak{a}}(\mathfrak{R}+\mathfrak{p}\mathfrak{O})=\mathfrak{a}+\overline{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{p}\mathfrak{O}$ 従ッテ $\overline{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{p}\mathfrak{O}\equiv0\ (\overline{\mathfrak{a}})$ ナルコト及 $\mathfrak{p}^m\equiv0\ (\mathfrak{a})$ 従ッテ $(\mathfrak{p}\mathfrak{O})^{m+1}\equiv0$ $\mathfrak{a}\mathfrak{p}\mathfrak{O}\equiv0\ (\overline{\mathfrak{a}}\mathfrak{p}\mathfrak{O})$ ナルコトヨリ

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{O})^{m+1}=\overline{\mathfrak{p}}^{\,m+1}\equiv0 \quad (\overline{\mathfrak{a}})$$

夫故 $\overline{\mathfrak{R}}$, (0) ト異ル Ideal ハ凡テ $\overline{\mathfrak{p}}$ ノ或ル冪ヲ含ム。ソノ結果 $\overline{\mathfrak{R}}$ ト異ル $\overline{\mathfrak{R}}$-Ideal ハ凡テ $\overline{\mathfrak{p}}$ ニ含マレテヰナケレバナラヌ。

次ニ $\overline{\mathfrak{R}}$ デ(0)ヲ除イテ両鎖律ノ成立スルコトヲ証ス。コレガ証セラレルト上ノコトヨリ $\overline{\mathfrak{R}}$ ノ凡テノ Ideale ((0) ト $\overline{\mathfrak{R}}$ ヲ除ク) ハ $\overline{\mathfrak{p}}$ ニ属スル Primärideal ナルコト即チ $\overline{\mathfrak{R}}$ ハ又両鎖律ヲ許ス Primärintegritätsbereich ナルコトヲ知ル。

証明：— $\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ一ツノ Ideal トシ $\mathfrak{a}\mathfrak{o}$ ト $\bar{\mathfrak{f}}=\mathfrak{f}\mathfrak{o}$ トノ間ニ $\bar{\mathfrak{R}}$-Ideale ノ組成列ノ存在スルコトヲ証シヨウ。$\mathfrak{a}'$ ヲ $\mathfrak{a}$ ノ $\mathfrak{R}$ ニ於ケル unmittelbaren Teiler トスレバ $\mathfrak{a}'=(\mathfrak{p},\mathfrak{a})$ ナルコト及 $\mathfrak{a}'\mathfrak{o}/\mathfrak{a}\mathfrak{o}$ ハ $\bar{\mathfrak{R}}/\bar{\mathfrak{f}} \cong \mathfrak{R}/\mathfrak{f} \cong \Delta$ ニ関シテ operatorisomorph ナ Minimalideale ノ直和ナルコト尚 $\mathfrak{o}/\mathfrak{f}\mathfrak{o}$ ガ Δ-Modul トシテ有限ナルコトヨリ $\mathfrak{a}'\mathfrak{o}/\mathfrak{a}\mathfrak{o}$ ノ Direkte Summanden ノ Anzahl ハ有限デアルコトガ云ヘル。ヨリテ $\mathfrak{a}\mathfrak{o}$ ヨリ $\mathfrak{a}'\mathfrak{o}$ ニ到ル Idealkette ハ有限項ヨリナル。

サテ $\mathfrak{a}$ ヨリ $\mathfrak{f}$ ニ到ル $\mathfrak{R}$-Ideal ノ組成列ガ存在スルカラ $\mathfrak{a}\mathfrak{o}$ ヨリ $\mathfrak{f}\mathfrak{o}=\bar{\mathfrak{f}}$ ニ到ル $\bar{\mathfrak{R}}$-Ideale ノ組成列ガ存在スル。

次ニ $\bar{\mathfrak{r}}$ ヲ任意ノ $\bar{\mathfrak{R}}$-Ideal トスレバ既述ノ通リ $\mathfrak{r}\mathfrak{f}\mathfrak{o} \equiv 0\ (\bar{\mathfrak{r}})$ デアル。今 $\mathfrak{r}\mathfrak{f}=\mathfrak{a}$ トトルト上ノ証明ニヨリ $\mathfrak{f}\mathfrak{o}$ ヨリ $\mathfrak{a}\mathfrak{o}$ ニ到ル組成列

$$\bar{\mathfrak{f}} \supset \bar{\mathfrak{t}}_1 \supset \bar{\mathfrak{t}}_2 \supset \cdots \supset \bar{\mathfrak{t}}_m = \mathfrak{a}\mathfrak{o}.$$

ガ存在スル。サテ $\bar{\mathfrak{r}}$ ヲ最終項トスル組成列ノ存在ハ

$$\bar{\mathfrak{f}}=(\bar{\mathfrak{f}},\bar{\mathfrak{r}}) \supseteq (\bar{\mathfrak{t}}_1,\bar{\mathfrak{r}}) \supseteq (\bar{\mathfrak{t}}_2,\bar{\mathfrak{r}}) \supseteq \cdots \supseteq (\bar{\mathfrak{t}}_m\, \bar{\mathfrak{r}})=(\mathfrak{a}\mathfrak{o},\bar{\mathfrak{r}})=\bar{\mathfrak{r}}$$

ヲトレバヨイ。カクテ $\bar{\mathfrak{R}}$ ニ於イテ両鎖律ハ成立スル（Noether, loc. cit. 最後ノ方参照）（コノ部分証了）

以上デ $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}+\mathfrak{f}\mathfrak{o}$ ハ両鎖律ヲ許ス Primärintegritätsbereich ナルコト知ッタ。所デ $\bar{\mathfrak{f}}=\mathfrak{f}\mathfrak{o}$ ハ $\mathfrak{o}$-Ideal デアルカラ $\bar{\mathfrak{R}}, \mathfrak{o}=\bar{\mathfrak{f}} \neq (0)$ デアル。従ッテ前拙文（14号）定理2ニヨリ $\mathfrak{o}$ ハ $\bar{\mathfrak{R}}$-Modul トシテ endlich デアル。従ッテ $\mathfrak{o}$ ニ於テモ Doppelkettensatz ハ成立スル。又 $\mathfrak{o}/\mathfrak{f}\mathfrak{o}$ ハ Primäre Ringe ノ直和トシテ分解セラレルトシテモ（2）ヨリ分ル通リ有限個ノモノガ直和ニシカ分解セラレナイ事ニヨッテ $\mathfrak{p}\mathfrak{o}$ ノ $\mathfrak{o}$ ニ於ケル Primideale 有限個

デアル. 而シシコレラ等以外ニ Primideale 存在シナイコトモ容易ニ知ロラレル. ヨリテ Krull ノ定理ハ以上デ証明サラレタ.

尚 $\mathfrak{N}$ ヨリ $\mathfrak{o}$ ニ到ル Ringkette ニ於テ $\mathfrak{N}\{\omega_{11}, \dots, \omega_{1m_1}; \dots; \omega_{i-1,1}, \dots, \omega_{i-1,m_{i-1}}\}$ ニヨッテ erzeugen サレル環 $\mathfrak{r}$ ヲ至ハモノト考ヘル. コノ $\mathfrak{r}$ ハ又両鎖律ヲ許ス. 何トナレバ $\omega_{j,l}$ ハ $\mathfrak{N}$ ニ対シテ代数的整デアルコトヨリ $\mathfrak{r}$ ノ $\mathfrak{N}$-Modul トシテ有限デアルカラデアル. 今コノ $\mathfrak{r}$ ニ於ケル Primideal ノ一ツヲ $\mathfrak{p}_j$ トスレバ $\mathfrak{o} = \mathfrak{r} + \mathfrak{p}_j\mathfrak{o}$ トナルコトハ容易ニ知ル. 即チ $\mathfrak{r}$ ヲ含ム様ナ下環ガ某カ一ツトレバ ソレノ $\mathfrak{o}$ ニ関シテノ Führer ハ必ズ Null デナケレバナラヌ.[1] カヽルコトガ果シテ存在シ得ルカドウカ 即チ両鎖律ガ成立スル Primär integritätsbereich $\mathfrak{N}$ デ $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{o} = (0)$ ナルコトノ Existenzbeweis ニツイテハ今ノ所私ニハヨク分リマセン. コノ Krull ノ定理ハ両鎖律(勿論(0)ヲ除ク)ヲ有スル抽象環ト有限次代数的数体内ノ環トヲ結ビツケル重要ナ定理デアリマスカラ上ノ Existenzproblem モ何トカ処理シナケレバナラヌ問題ト思ヒマス.

ツイデニ14号ニノセマレタモノノ説明ノ補足ト正誤ヲ付シテオキマス.

(i) $\mathfrak{o}:\mathfrak{p}$ トヨク書キアレタガ コレハ環 $\mathfrak{N}$ ニオケル普通ノ Quotientideale ヲ意味シマス. $\mathfrak{p}:\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^0$ トカイタ所ハ前文ニテレリ通リ Quotientenkörper 内ノ $\mathfrak{p}$ ノ Operatorenbereich デス.

(ii) 定理5デ $\mathfrak{d} = \mathfrak{N}'$ ナル時 ト書キマシタガ コノ $\mathfrak{N}'$ ハ前定理ト用ヒ条件ヲ充スモノダカラ、即チ $\mathfrak{N}'$ ガ $\mathfrak{N}$-Modul トシテ einfach ナル時 ト書クベキデス.

(iii) $\boxed{\text{正誤}}$：第2頁最后ノ行デ 前仮定カラ トアルハ 前定理カラ ノ誤リ.

(iv) 定理6ノ証明ニ当ッテ $\mathfrak{o} \neq \mathfrak{N}$ ナル時ニハ不確カナコトノ書キマシタガ ソノ時モ定理ハ成立シマス.

---

1) 出番：東北数学雑誌, 37巻 定理 2, 3 参照