全國紙上談話会　第17号

47. 所謂同値律ニツイテ　北川敏男（阪大）

集合 $\mathfrak{M}$ ニ於イテ、ソノ元素ニ同値トイフ概念スル時、普通ハ次ノ三律ヲ要請スル。I. $\mathfrak{M}$ ノ任意ノ元素 a ニ対シテ $a\sim a$ （反射律）

II $a\sim b$ ナラバ $b\sim a$ （対称律）

III. $a\sim b,\ b\sim c$ ナラバ $a\sim c$ （移動律）

筆者ガ問題ニスルノハ、Iニ関シテデアルガ、極メテ見聞ノ狭イ筆者デアルカラ或ハ既ニ解決サレタ事カ、或ハ重大ナ誤リヲオカシテ居ハシマイカト恐レルノデアルケレドモ、多年気ニカカツテ仕方ノナイ問題故、貴重ナ一頁ヲオ借リテ諸賢ノ御高教ヲオ願ヒ致ス次第デアル。

先ヅII, III共ニ假言的命題デアルカラ、或ル a ニ対シテコレト equivalent（即チ $a\sim a'$）ナル a' ノ存在スルヤ否ヤハ保証サレテヰナイ。存在ヲ保証スルノハ、Iデアル。サレド存在ヲ保証スルタメノ要請トシテハ、甚ダ不可思議ナ形デアル。何故ニ端的ニ、Iニ代フルニ

I' $\mathfrak{M}$ ニ属スル任意ノ a ニ対シ $a\sim a'$ ナル a' ガ存在スル。（勿論 $a'\in\mathfrak{M}$）

ヲ以ツテシナイノデアルカ？ 加フルニ、論理學ノ同一律 AハAデアルト区別スベキデアル以上、Iヲステ I'ヲトルベキデハナイカ？

I', II, III ノ假定ノモトニ、Iガ導カレルコトハ明カデアル；任意ノ a ニ対シテ $a\sim a'$ ナル a' ガアル。IIニヨツテ $a'\sim a$

IIIニヨツテ $a\sim a$ トナル。

公準系 I', II, III ガ矛盾ニナイコトハ、a ヲ唯一ツノ要素トスル集合ヲ考ヘレバ明デハアル ト思フ。

$\boxed{\text{正誤}}$ ―第十六号 46　函数ノ単葉性ニ関スル注意（尾崎繁雄）

定理4ノ証明中ニ計算違ヒガアリマシタノデ訂正シマス

定理4　$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$ $|z|<1$ デ正則デ且ツコヽデ $|f(z)-z|\leqq M$ トスル。シカルトキハ $f(z)$ ハ $|z|<r_0$ デ単葉ナリ。ココニ $M\geqq\dfrac{\sqrt5+1}{4}$ ナルトキハ $r_0=\dfrac{1}{2M}\left(\leqq\dfrac{\sqrt5-1}{2}\right)$ 又 $M<\dfrac{\sqrt5+1}{4}$ ナルトキハ $r_0=\sqrt{\dfrac{\sqrt{(1-M)(1+3M)}-(1-M)}{2M}}\left(>\dfrac{\sqrt5-1}{2}\right)$

証明　$\varphi(z)=\dfrac{f(z)-z}{z^2}$ トスレバ $\varphi(z)$ ハ $|z|<1$ デ正則デアルカラ $|z|<1$ ニ於テ $|\varphi(z)|\leqq M$ デアル。従ッテヨック知ラレタ有界函数ノ性質ニヨリ $|\varphi'(z)|\leqq\dfrac{M^2-|\varphi(z)|^2}{M(1-|z|^2)}$ ヲ得ル。

$$\varphi'(z)=\frac{f'(z)-1-2z\varphi(z)}{z^2}$$ ナルコトガ容易ニ計算デキルカラ

結局
$$|f'(z)-1|\leqq\frac{M^2-|\varphi(z)|^2}{M(1-|z|^2)}|z|^2+2|z||\varphi(z)|$$
$$=\frac{M^2|z|^2+|\varphi(z)|^2|z|^2\left\{\frac{2(1-|z|^2)}{|z|}M-|\varphi(z)|\right\}}{M(1-|z|^2)}\quad\cdots\cdots(1)$$

備極値ヲ求メル簡単ナ計算ニヨリ右辺ノ分子ハ ……(2)
$|\varphi(z)|=\dfrac{1-|z|^2}{|z|}M$ ノ時最大トナル、併シ $|\varphi(z)|\leqq M$ ダカラ

$\dfrac{1-|z|^2}{|z|}>1$ 即チ $|z|<\dfrac{\sqrt5-1}{2}$ ナル時ニハ (1)ノ右辺ノ最大ハ $|\varphi(z)|=M$ ノ時ニ起ル。コノ時 $|f'(z)-1|\leqq\dfrac{M^2\{|z|^2+2|z|(1-|z|^2)-|z|^2\}}{M(1-|z|^2)}=2M|z|$

故ニ $|z| < \min\left(\frac{1}{2M}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ ニ於テハ 即チ $\Re f'(z) > 0$。故ニ能代氏ノ定理"$\varphi(z)$ ガ凸範囲 D 内デ正則デ且ココデ $\Re \varphi'(z) > 0$ ナラバ $\varphi(z)$ ハ D 内デ単葉デアル"ニヨリ $f(z)$ ハ $|z| < \min\left(\frac{1}{2M}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ デ単葉デアル。換言スレバ $M \geqq \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ナルトキニハ $f(z)$ ハ $|z| < \frac{1}{2M}$ デ単葉デアル。次ニ $\frac{1-|z|^2}{|z|} \leqq 1$ 即チ $|z| \geqq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ナル場合ニハ (1) ノ右辺ハ (2) ニヨリ $|\varphi(z)| = \frac{1-|z|^2}{|z|} M$ ノ時最大トナル。コノトキ

$$|f'(z)-1| \leqq \frac{M^2|z|^2 + (1-|z|^2)^2 M^2}{M(1-|z|^2)} = \frac{M(1-|z|^2+|z|^4)}{1-|z|^2}$$

故ニ、

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqq |z| < \sqrt{\frac{\sqrt{(1-M)(1+3M)} - (1-M)}{2M}} \qquad \cdots\cdots (3)$$

ニ於テハ $|f'(z)-1| < 1$ 即チ $\Re f'(z) > 0$ シカシテ $f(z)$ ノ正則性カラ上式ハ $|z| < \sqrt{\frac{\sqrt{(1-M)(1+3M)} - (1-M)}{2M}}$ ナル凡テノ z ニ対シテ成立スルカラ、$f(z)$ ハコノ範囲デ単葉デアル。ココデ (3) ヲ満足スル様ナ M ノ範囲ヲ調ベルト $M < \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

結局 $M < \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ナル場合ニハ $f(z)$ ハ $|z| < \sqrt{\frac{\sqrt{(1-M)(1+3M)} - (1-M)}{2M}}$ デ単葉デアル。尚 $M \geqq \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ナル場合ニハ 明カニ $f(z) = z + Mz^2$ ニヨリ極限ノ場合ガ達セラレル。