46 函数ノ単葉性ニ関スル注意

尾崎繁雄（東京文理大）

本紙12号36ノ鍋谷氏ノ論説ヲ補充スルツモリデ次ノ結果ヲ述ベテ見タイ。

<u>定理4</u>　$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots$

ガ $|z|<1$ デ正則デシカモ ココデ

$$|f(z)-z|<M$$

ヲ満足スレバ $f(z)$ ハ $|z|<r_0=\min\left(\frac{1}{\sqrt{1+M}},\ \frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)$ デ単葉デアル。 $r_0=\frac{1}{\sqrt{1+M}}\leqq\frac{\sqrt{17}-1}{4}$ ナル場合ハ

$$f(z)=z+\frac{r_0-z}{1-r_0z}Mz^2$$

ニヨツテ極限ノ場合ガ達セラレル。

証明　$\varphi(z)=\dfrac{f(z)-z}{z^2}$　トオケバ　$\varphi(z)$ ハ $|z|<1$ デ正則デアルカラ $|z|<1$ ニ於テ　$|\varphi(z)|<M$　デアル。従テヨク知ラレタ有界函数ノ性質ニヨリ

$$|\varphi'(z)|\leqq\frac{M^2-|\varphi(z)|^2}{M(1-|z|^2)}$$

ヲ得ル。　$\varphi'(z)=\dfrac{f'(z)-1-2z\varphi(z)}{z^2}$　ナルコトガ容易ニ計算デキルカラ結局

$$|f'(z)-1|\leqq\frac{M^2-|\varphi(z)|^2}{M(1-|z|^2)}|z|^2+2|z||\varphi(z)|$$

$$=\frac{M^2|z|^2-|\varphi(z)||z|^2\left\{\frac{2(1-|z|^2)}{|z|}M-|\varphi(z)|\right\}}{M(1-|z|^2)}$$

故ニ $\dfrac{2(1-|z|^2)}{|z|}\geqq1$ ナラバ、即チ、 $|z|\leqq\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}$ ナラバ

$$\leqq \frac{M^2|z|^2}{M(1-|z|^2)}$$

従テ $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{1+M}}$ ナルトキハ

$$|f'(z)-1| < 1 \quad 即チ \quad \Re f'(z) > 0$$

故ニ能代氏ノ定理"$\phi(z)$ガ凸範囲 D 内デ正則デ,且.ココデ $\Re\phi'(z) > 0$ ナラバ $\phi(z)$ ハ D 内デ単葉デアル" ニヨリ $f(z)$ ハ $|z| < \min\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+M}}, \dfrac{\sqrt{17}-1}{4}\right)$ デ単葉デアル。

扨コノ定理デハ M ガ相当ニ小サイ値ノ場合ニモ $f(z)$ ノ単葉性ハ $|z| < \dfrac{\sqrt{17}-1}{4}$ ニ於テ云ハレルバカリデ精密ナ単葉半径ヲ求メル事ガデキナイ。シカシ定理4ノ假設ノ下ニ於テハ $f(z)$ ハ M ノ値ニ無関係ニ $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{1+M}}$ デ単葉デアルラシイガ今ノトコロマダ分ラナイ。コノ事ガ証明出来ナイカギリ次ノ定理4'モ十分小ナル M ニ対シテハ幾分役立ツ訳デアル。

<u>定理4'</u> $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$
ガ $|z| < 1$ デ正則デシカモココデ

$$|f(z) - z| < M (< 1)$$

ヲ満足スレバ $f(z)$ ハ $|z| < \sqrt{1-M}$ デ単葉デアル。

証明ハ $\phi(z) = f(z) - z$ トオク事ニヨリ定理4ト同ジ方針デ容易ニデキル。

<u>定理5</u> $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$
ガ $|z| < 1$ デ正則デシカモココデ

$$|f'(z) - 1| < M$$

ヲ満足スレバ $f(z)$ ハ $|z| < \min\left(1, \frac{1}{M}\right)$ デ単葉デアル。
極限ノ場合ハ

$$f(z) = z + \frac{M}{2} z^2$$

ニヨツテ到達サレル。

證明. Schwarz ノ lemma ニヨリ $|f'(z) - 1| < M|z|$ $(|z| < 1)$
故ニ定理4ト同ジ方針デ容易ニ證明デキル。

最後ニ本紙7号25ニ於テ高橋氏ガ引合ヒニ出シテヰル Bieberbach ノ定理 (Crelle Journal 157, (1927) 189–192) ヲ少シ精密ニシテ見タイ。シカシ尚コレガ正確ナ制限ヲ与ヘテヰルモノトハ思ハレナイ。

<u>定理6</u> $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ ガ $|z| \leqq \rho_0$ $(\rho_0 > 1)$ ニ於テ pole ヲ除ケバ正則, 且ツ $\frac{f(z)}{z} \neq 0$ トスル。 $|z| = \rho_0$ 上デ

$$|f(z)| > \frac{\rho_0}{\sqrt{1 + |a_2|^2 + \frac{(\rho_0^2 - 1)^3}{\rho_0^2 + 1}}} \qquad (1)$$

ナラバ $f(z)$ ハ $|z| < 1$ デ単葉デアル。

コノ定理ニ於テ (1) ノ右辺ニアル $|a_2|^2$ ヲ無視スレバ Bieberbach ノ定理1′ガ得ラレル。尚定理1′ガ常ニ定理1ヨリモ精密ナルコトハ容易ニ證明デキル。

證明。
$$m = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 + |a_2|^2 + \frac{(\rho_0^2 - 1)^3}{\rho_0^2 + 1}}} \qquad (2)$$

トオケバ

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n + \cdots,$$

ハ $0<|z|\leqq\rho_0$ デ正則デ $|z|=\rho_0$ 上デハ $\left|\frac{1}{f(z)}\right|<\frac{1}{m}$ デアル
カラ $z=\rho_0e^{i\theta}$ ニ対シテ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{f(z)}\right|^2d\theta=\sum_{n=-1}^{\infty}|b_n|^2\rho_0^{2n}\qquad(b_{-1}=1)$$

$$\therefore\quad\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2\rho_0^{2(n+1)}=\frac{\rho_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{f(z)}\right|^2d\theta<\frac{\rho_0^2}{m^2}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|\leqq\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2\rho_0^{2(n+1)}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{1}{\rho_0}\right)^{2(n+1)}}$$

$$<\sqrt{\frac{\rho_0^2}{m^2}-1-|b_0|^2}\sqrt{\frac{\left\{1+\left(\frac{1}{\rho_0}\right)^2\right\}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)^4}{\left\{1-\left(\frac{1}{\rho_0}\right)^2\right\}^3}}=\sqrt{\frac{\rho_0^2}{m^2}-1-|a_2|^2}\sqrt{\frac{\rho_0^2+1}{(\rho_0^2-1)^3}}$$

$$=1\quad[(2)\text{ニヨル}]$$

故ニ $\frac{1}{f(z)}$ ハ $|z|<1$ デ単葉デアル。[拙論東京文理大紀要 A.2 (1934) 41頁 Lemma 1 参照] 従テ $f(z)$ モ $|z|<1$ デ単葉デアル。
尚、ρ_0 ガ相当 1 ニ接近シテヰル場合ニハ寧ロ次ノ定理ガ有効デアル。

定理7. $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ ガ $|z|\leqq\rho_0$ $(\rho_0>1)$ ニ於テ pole ヲ除ケバ正則、且 $\frac{f(z)}{z}\neq0$ トスル。$|z|=\rho_0$ 上デ

$$|f(z)|>\sqrt{2\rho_0-1}$$

ナラバ $f(z)$ ハ $|z|<1$ デ単葉星型デアル。

コノ定理ヲ証明スルニハ是ト同値ナル次ノ定理ヲ証明スレバヨイ。

定理7' $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ ガ $|z|\leqq1$ デ pole ヲ除ケバ正則 且 $\frac{f(z)}{z}\neq0$ トスル。$|z|=1$ 上デ $|f(z)|>m$ ナラバ

(コノトキ當然 $m \leq 1$ トナル) $f(z)$ ハ $|z|<1-\sqrt{1-m^2}$ デ
單葉~~[illegible]~~、星型デアル。

證明 $\varphi(z)=\frac{z}{f(z)}$ トオケバ $\varphi(z)$ ハ $|z|\leq 1$ デ正則デシカモ
ココデ $|\varphi(z)|<\frac{1}{m}$ トナルカラ $\varphi(0)=1$ ナルコトニ注意スレバ
有界函數ノ性質ヨリ $\varphi(z)$ ハ實軸上ノ二點 $\dfrac{1-\frac{|z|}{m}}{\frac{1}{m}-|z|}$, $\dfrac{1+\frac{|z|}{m}}{\frac{1}{m}+|z|}$
ヲ結ブ線分ヲ直徑トスル円内ノ値ヲトル。故ニ $|z|<m$ ニ於テハ

$$|\varphi(z)|>\frac{1-\frac{|z|}{m}}{\frac{1}{m}-|z|}=\frac{m-|z|}{1-m|z|}$$

トナル。次ニ

$$|\varphi'(z)|\leq m\,\frac{\frac{1}{m^2}-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}$$

デアルカラ

$$\left|1-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leq m\,\frac{\frac{1}{m^2}-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}\,|f(z)|=\frac{|z|\left\{\left|\frac{m}{\varphi(z)}\right|-\left|\frac{\varphi(z)}{m}\right|\right\}}{1-|z|^2}$$

故ニ $|z|<m$ ニ於テハ

$$\leq\frac{|z|\left\{\frac{1-m|z|}{m-|z|}-\frac{m-|z|}{1-m|z|}\right\}}{1-|z|^2}$$

従テ $|z|<1-\sqrt{1-m^2}$ ニ於テハ <1

結局 $|z|<1-\sqrt{1-m^2}$ ニ於テ $\Re\,\dfrac{zf'(z)}{f(z)}>0$ 即チ單葉星型トナル。[拙論, 東京文理大紀要 A, 2 (1934), 41頁 定理7ノ參照]

尚定理7ニ於テ極限ノ場合ハ

$$f(z)=\frac{1-mz}{m-z}\,mz$$

ニヨリ到達サレル。コノ定理ハ次ノ様ニ換言スルコトモデキル。

__定理7''__ $\varphi(z) = z + b_2 z^2 + \cdots$ ガ $|z| \leqq 1$ デ正則デミカモ

ココデ $|\varphi(z)| < M$ ナラバ

$$f(z) = \frac{z^2}{\varphi(z)} = z + a_2 z^2 + \cdots \quad \text{ハ} \quad |z| < \frac{M - \sqrt{M^2 - 1}}{M} \quad \text{デ}$$

單葉星型ナリ。

序ニ能代氏ノ論説(12号35)ニ於テ $f(z)$ ニ pole ノ存在ヲ許シテモ同様ナ結果ガ得ラレルカラ注意シテオキタイ。

__定理8__ $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ ガ $|z| < \rho_0$ $(\rho_0 > 1)$ デ pole ヲ除ケバ正則デミカモココデ $|f(z)| > \rho_0$ ナラバ $f(z)$ ハ $|z| < 1$ デ單葉デアル。

証明 $\dfrac{1}{f(z)}$ ハ $|z| < \rho_0$ デ正則デミカモココデ $\left|\dfrac{1}{f(z)}\right| < \dfrac{1}{\rho_0}$ デアルカラ $\dfrac{1}{f(0)} = 1$ ナルコトニ注意スレバ $\dfrac{1}{f(z)}$ ハ実軸上ノ二点 $\dfrac{\rho_0 - \frac{1}{\rho_0}|z|}{1 - |z|}$, $\dfrac{\rho_0 + \frac{1}{\rho_0}|z|}{1 + |z|}$ ヲ結ブ線分ヲ直径トスル円内ノ値ヲ取ル。故ニ $|z| < 1$ ニ於テハ $\mathfrak{R} f'(z) > \dfrac{2\rho_0}{\rho_0^2 + 1} > 0$ 即チ $f(z)$ ハ $|z| < 1$ デ單葉デアル。

(19年10月18日受取)