45. アル種ノRiemann面ノ等角描寫ニツイテ

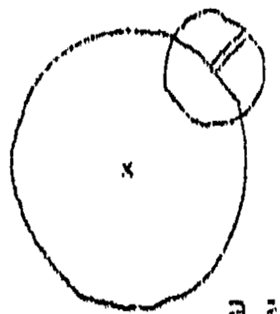
小林 善一 (東京高師)

今春ノ數物總會デアル種ノRiemann面ニ對スル一點ヲ除イタ一枚ノ全平面ニ等角ニ描寫デキル爲ノ一ツノ十分條件ヲ述ベタ。

今Riemann面Fガ

I Fニ屬スル円板(單葉又ハ複葉)ヲ作ルトキ一點ヲ除ケバ スベテ、此ノ内點ガFニ屬スルナラバ此ノ一點モ亦Fニ屬スル。

II Fノ單葉円板Dノ周上ニアル Rand-point ハ之ヲ中心トシ半徑ニ副ツテ切斷ノアルFノ切斷円板ガ作レル。但シ切線ハDノ周ト直角ニ外方ニ向フモノトスル。



III Fハ單一連結デアル。

ヲ滿足スルモノトシ 之ヲ (K)-class ト呼バウ。

周ニ少クトモ二ツノ特異點ノアル円板(單葉)ヲ生産円板ト呼ビ、ソノ特異點(有限ノモノ)カラ円板ノ中心ニ引イタ直線ヲ生産矢線ト呼ブコトニスル。

生産円板ノ球面中心(円板ノ球面射影デ生ズル球面円板ノ中心ニ對應スル點)ノ軌跡ハ連結的ナ線系デアル。之ヲSトスル。Fヲ位相変換ニヨツテ一點ヲ除イタ全平面ニ描寫スルトキSノ描像ヲTトシTヲ、位相樹木ト呼ブコトニスル。位相樹木ノ弧ノ角長トハ對應スル二円板ノ分岐點ヲ共有スル生産矢線ノ間ノ角ヲ基トシテ測ルコトトシTノ任意ノ點tヲ定點t_0ニ結ブTノ單一曲線ノ角長ノ

最小ヲモツテtノt_0カラノ角距離ト呼ブコトトスル。

t_0カラθナル角距離ニアルTノ点ノ数ヲ$\mu(\theta)$，又

$$\lambda(\bar{\theta}) = \max_{\theta \leqq \bar{\theta}} \mu(\theta)$$

トオク。又$\theta < \bar{\theta}$ニアルTノ角長ノ和ヲ$\rho(\bar{\theta})$トスレバ

$$\rho(\bar{\theta}) = \int_0^{\bar{\theta}} \mu(\theta)\, d\theta \leqq \bar{\theta}\lambda(\bar{\theta})$$

定理I．(K)-classノRiemann面Fニ於テ$\int_{\theta_0}^{\infty} \frac{d\theta}{\theta\lambda(\theta)}$ガ発散スレバFハ抛物的デアル。

ガ成立スル。春ノ報告ノ際、Fノ無限遠点ニハ特異点ノナイコト及ビt_0ニ対応スル生産円板ノ中心ガ有限ニアルコト等ノ條件ハ取リ去リ得ル。

尚コノ定理デハアル種ノ楕円函数例ヘバ sn z ノ逆函数ノRiemann面ニハ効力ガ及バナイ。

進ンデ

定理II　(K)-classノRiemann面Fニ於テ$\int_{\theta_0}^{\infty} \frac{d\theta}{\rho(\theta)}$ガ発散スレバFハ抛物的デアル

ガ証明デキル様デアル。之ダトIヨリ多少有力デアルガ前記ノ例ニ効果ノ及バナイコトハ前ト同様デアル。

定理IIノ証明ノ概要ハ次ノ通リデアル。

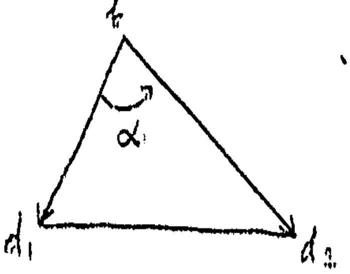
面Fヲ次ノ線ニヨツテ三角形又ハ二角形範囲ニ分ケル。

1° 生産中心ノ軌跡

2° 定円板D_0（t_0ニ対応スルモノ）ノスベテノ生産矢線

3° 節円板（周ニ三以上ノ分岐的ノアルモノ）ノスベテノ生産矢線

4° 極限円板（樹木TノO節点，定点t_0ヲ含マヌ單一弧上デt_0カラノ角距離ノ最大ナルモノニ対応スル円板）ノスベテノ生産矢線



ソノ中ノ一ツ bd_1d_2 ヲトル。

$$\begin{cases} b; & \text{分岐点} \\ bd_1,\ bd_2; & 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ \text{ノ何レカニ属スル矢線} \\ d_1d_2; & 1^\circ \text{ノ部分} \end{cases}$$

D_0カラノ角距離θヲ増加スルニツレテ対応スル矢線ガbヲ中心トシテ反時計廻リヲナスモノヲ（+）類，時計廻リヲナスモノヲ（−）類ト呼バウ。（+）類ニ於テハ

(1) $$y = \log(w-b) + (m-a)i$$

但シ $\begin{cases} w: F\text{ノ複素平面ヲ表ハス数} \\ a = Amp(d_1 - b) \\ m: bd_1 \text{ノ} D_0 \text{カラノ角距離} \end{cases}$

ニヨツテ$\triangle bd_1d_2$ヲ $m < \mathfrak{I}(y) < m+\alpha$

ニ描写スル。（−）類ノ$\triangle bd_1d_2$ヲトルトキ

(2) $$y = \overline{\log}(w-b) + (m+a)i$$ 但シ $\overline{\log}\,x$ハ$\log x$ノ共軛函数

ニヨツテ $m < \mathfrak{I}(y) < m+\alpha$ ニ描写スル。

Fハ(1)又ハ(2)ニヨツテ部分的等角（角ノ対応ハ上ニ様）ニ壔状面Yニ描写サレル。次ニFヲ

$$z = z(w)$$

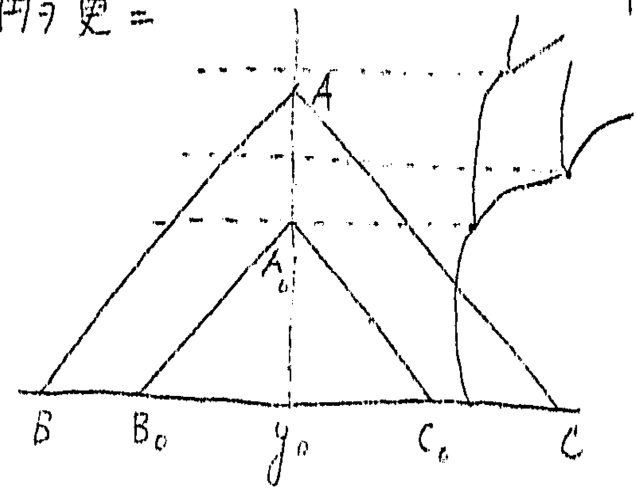
ニヨツテ、$|z|<R$ ニ描写シ此ノ円ヲ更ニ

$$u=\log z$$

ニヨツテ帯状範囲

$$0 \leqq \mathfrak{J}(u) < 2\pi$$

ニ描写スル。



p_0' ハ定円板 D_0 ノ一矢線上ノ有限点トシ Y上ニハ y_0 ニ、z平面デハ $z=0$ ニ対応スルモノトスル。Yヲ y_0 ヲ斜辺ノ中点トスル直角三角形 ABC デセクル。ソノ内部ヲ $Q(\theta)$ （但シ $\theta=y_0A$）トスル。セクロハYノ内点ヲ走ル故、$Q(\theta)$ ニハ z-平面デハ $q(\theta)$ ガ、u-平面デハ $q'(\theta)$ ガ対応スルモノトシ之等ノ周ハ夫々内点ヲ走ル。

$q(\theta)$ ハ $z=0$ ヲ含ミ $|z|=R$ ニ含マレル故 $z=0$ ヲ含ム少クトモ一ツノ巡回路ガアル。故ニ $q'(\theta)$ ノ周ハ帯ノ内部ヲ走リ周ノ長サ $l(\theta)$ ハ

$$(3) \qquad l(\theta) \geqq 2\pi$$

且

$$l(\theta)=\int_{BAC}\left|\frac{du}{dy}\right||dy|$$

デアル。Schwarz ノ不等式ニヨリ

$$(4) \qquad 4\pi^2 \leqq (l(\theta))^2 \leqq \int_{BAC}|dy|\int_{BAC}\left|\frac{du}{dy}\right|^2|dy|$$

然ルニ

$$(5) \qquad \int_{BAC}|dy| \leqq 2K_1\int_0^\theta n(\theta)\,d\theta, \quad \text{但シ} \begin{cases} K_1 \text{；常数} \\ n(\theta) \text{ ハ高サ} \theta \text{ニ於ケル Y ノ葉数} \end{cases}$$

又 $B_0A_0C_0$ 及ビ BAC デカコマレル範圍ニ対応スル帯状範圍ノ面積ヲ $A(\theta)$ トスルト

$$(6)\qquad A(\theta)= K_2\int_{\theta_0}^{\theta}\left\{\int_{BAC}\left|\frac{du}{dy}\right|^2|dy|\right\}d\theta$$

K_2 ハ常数
$\theta_0 = y_0A_0$

デアル。故ニ

$$(7)\qquad \frac{1}{K_2}\frac{dA}{d\theta} = \int_{BAC}\left|\frac{du}{dy}\right|^2|dy|$$

(4), (5), (7) カラ

$$2\pi^2 \leqq \frac{K_1}{K_2}\int_0^{\theta} n(\theta)\,d\theta \times \frac{dA}{d\theta}$$

$$\therefore\qquad \frac{K_3}{\int_0^{\theta} n(\theta)\,d\theta} \leqq \frac{dA}{d\theta}$$

K_3 ハ常数

$$\therefore\qquad K_3\int_{\theta_0}^{\theta}\left\{\frac{1}{\int_0^{\theta} n(\theta)\,d\theta}\right\}d\theta \leqq A(\theta) \leqq 2\pi(\log R - \log R_0)$$

$$R_0 = \min_{y \text{ on } A_0B_0C_0} |z|$$

故ニ $\int_{\theta_0}^{\theta}\left\{\frac{1}{\int_0^{\theta} n(\theta)\,d\theta}\right\}d\theta$ ガ發散スレバ F ハ抛物的デアル。

シカルニ F ニ於ケル節デナイ生産円板ノ分岐点ガ二ツ共有限ナラバ矢線ハ二ツ，一ツダケ有限ナラバ一ツデアルカラ、

$$\mu(\theta) \leqq n(\theta) \leqq 2\mu(\theta)$$

$$\therefore\qquad \rho(\theta) = \int_0^{\theta}\mu(\theta)\,d\theta \leqq \int_0^{\theta} n(\theta)\,d\theta \leqq 2\int_0^{\theta}\mu(\theta)\,d\theta.$$

9年10月18日 受取。