35. 函數ノ單葉性ニ就テ。　能代清(北大)

解析函數ノ單(複)葉性ニ就テ氣ノ附イタコトガラヲ述ベテ見タイ。大シタ準備ヲシタワケデナイカラ不備ノ點ガアルカモ知レマセン。先ヅ本紙上談話會第9号,25デ高橋進一君ガ

$f(z)=z+\cdots\cdots$　ヲ $|z|<\rho$ $(\rho>1)$ デ正則トシタトキ $|z|<\rho$ デ

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|<M(\rho)$$

ヲ滿足スルナラバ $f(z)$ ガ $|z|<1$ デ單葉ナルコトガ云イル樣ナ $M(\rho)$ ノ決定ニ對スルーツノ解答ヲ初等的ナ方法デ出シテ居リマスガ,之ニ關シテ次ノ樣ナ少シ一般的ナ考ヘ方ヲシテ見ヨウト思ヒマス。$f(z)=z+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<\rho$ $(\rho>1)$ デ正則トスル時,ココデ $f(z)$ ノ値ガ如何ナル領域 $D(\rho)$ ニ屬スルトスレバ $f(z)$ ガ $|z|<1$ デ單葉トナルコトガ云イルカ。先ヅ $\frac{f(z)}{z}\subset D$ ト假定スル。(但,D ハ少クトモ三ツノ界點ヲ有スルモノトスル)。$z=\rho t$ トオケバ

$\phi(t)=\frac{f(\rho t)}{\rho}=t+\cdots\cdots$　ハ $|t|<1$ デ正則且ツコノデ

$$\frac{\phi(t)}{t}=\frac{f(\rho t)}{\rho t}=\frac{f(z)}{z}\subset D$$

故ニ $\phi(t)$ ハ $|t|<R(D)$ デ單葉デアル樣ナ $R(D)$ ガ存在スル。(例ヘバ正規族ノ理論ヲ用フ)　隨テ $f(z)=\rho\,\phi\left(\frac{z}{\rho}\right)$ ハ $|z|<\rho R(D)$ デ單葉トナル。$\rho R(D)\geqq 1$ ナル樣ナ D ヲ逆ニ探ス。

一例トシテ　D ; 円 $|z|<M$ (勿論 $M>1$) ノ場合ハ Dieudonné ノ定理ヨリ

$\phi(t)$ ハ $|t|<M-\sqrt{M^2-1}$ デ単葉（且星型）デアルカラ

$f(z)$ ハ $|z|<\rho(M-\sqrt{M^2-1})$ デ単葉デアル。

$\rho(M-\sqrt{M^2-1})\geqq 1$ ヨリ $M\leqq\frac{1}{2}(\rho+\frac{1}{\rho})$

定理 1. $f(z)=z+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<\rho$ $(\rho>1)$ デ正則且ツココデ

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|<\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right) \qquad (1)$$

ナラバ，$f(z)$ ハ $|z|<1$ デ単葉（實ハ星型）デアル。(1)ノ右辺ハヨリ大キク出来ナイ（之レハ Dieudonné ノ定理ガ精密ナコトヨリワカル）

同様ニ D; $0<|z|<M$（勿論 $M>1$）トシテ見レバ

$\phi(t)$ ハ $|t|<\log_e M-\sqrt{(\log_e M)^2-1}$ デ単葉（星型）デアルカラ

$f(z)$ ハ $|z|<\rho(\log_e M-\sqrt{(\log_e M)^2-1})$ デ単葉（星型）デアル。

$\rho(\log_e M-\sqrt{(\log_e M)^2-1})\geqq 1$ ヨリ $M\leqq e^{\frac{(\rho-1)^2}{2\rho}}$

定理 2. $f(z)=z+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<\rho$ $(\rho>1)$ デ正則且ツコヽデ

$$0<\left|\frac{f(z)}{z}\right|<e^{\frac{(\rho-1)^2}{2\rho}} \qquad (2)$$

トスレバ，$f(z)$ ハ $|z|<1$ デ単葉（實ハ星型）トナル。(2)ノ右辺モ正確ナモノデアル。（以上定理 1, 2 ト拙論北大紀要 II, 定理 3, 6 ヲ比較シテ見テ下サイ）

$\frac{f(z)}{z}\subset D$ ノ代リニ $f'(z)\subset D$ トシテモ同様ナ議論ガデキル。例ヘバ

定理 3. $f(z)=z+\cdots$ ガ $|z|<\rho$ $(\rho>1)$ デ正則ナトキ

$$|f'(z)|<\rho$$

ナラバ $|z|<1$ デ単葉（実ハ星型）デアル。コノトキ，ρ ハ最モヨイ値デアル。

（拙著，學士院記事，VIII (1933), No.7, P 275–277）

次ニ $\phi(t)=t+\cdots$ ガ $|t|<1$ デ正則且ツココデ

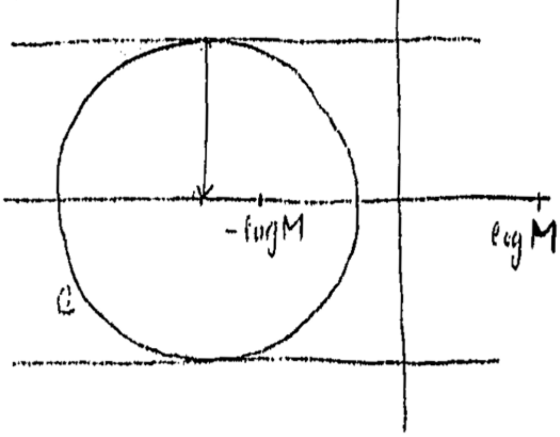
$$0<|\phi'(t)|<M \qquad (\text{明カニ } M>1)$$

トスル。 $0<\left|\frac{\phi'(t)}{M}\right|<1$

$$w=\log\frac{\phi'(t)}{M}=\log\left|\frac{\phi'}{M}\right|+i\arg\frac{\phi'}{M}=\log\left|\frac{\phi'}{M}\right|+i\arg\phi' \quad (\text{但シ } \log 1=0)$$

トオケバ w ハ $|t|<1$ デ $\Re(w)<0$ トナル。 $|t|\leqq r$ ニ於テハ Schwarz ノ lemma ヨリ $\left|\frac{w+\log M}{w-\log M}\right|\leqq r$ デアルカラ $|t|\leqq r$ 内デ $w=\log\frac{\phi'}{M}$ ノトル値ハ一ツノ円 C : $\left|\frac{w+\log M}{w-\log M}\right|=r$ ノ内又ハ上ニアル。C ノ半径ヲ求メルト $\frac{2r}{1-r^2}\log M$ デアル。ヨツテ

$$|\arg\phi'(t)|\leqq\frac{2r}{1-r^2}\log M \quad \text{for } |t|\leqq r$$



$\frac{2r}{1-r^2}\log M=\frac{\pi}{2}$ トケバ $r_0=-\frac{2}{\pi}\log M+\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\log M\right)^2+1}$ 故ニ $|t|<r_0$ ナラバ

$|\arg\phi'|<\frac{\pi}{2}$ 即チ $\Re(\phi')>0$。

サテ $\phi(t)$ ガ凸状領域 D デ正則且 $\Re(\phi')>0$ ナラバ D デ単葉デアルトユフ定理（証明ハ近ク二出ル北大紀要ノ拙論，掛谷先生ノ非常ニ奇麗ナ幾何學的証明ハ尾崎君ガ大塚數學會誌3巻 p.14 デ紹介シテヰル）ヲ用ヒルト $\phi(t)$ ハ $|t|<r_0$ デ単葉トナル。

注意 $0<|\phi'(t)|<M$ ノ代リニ $\infty>|\phi'(t)|>m$ （明ニ $m<1$）トスレバ $0<\left|\frac{1}{\phi'}\right|<\frac{1}{m}=M$ ヨリ $|t|<r_0$ デ $\Re\left(\frac{1}{\phi'}\right)>0$ 即チ $\Re(\phi')>0$. ヨツテ $|t|<r_0=-\frac{2}{\pi}\log\frac{1}{m}+\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\log\frac{1}{m}\right)^2+1}$ デ単葉デアル。

従テ定理1,2ノ証明ト同様ニシテ

<u>定理 4.</u>　$f(z)=z+\cdots$ ガ $|z|<\rho$ $(\rho>1)$ デ正則ナルトキ，若シ

$$0<|f'(z)|<e^{\frac{\pi}{4}(\rho-\frac{1}{\rho})}\qquad |z|<\rho$$

ナラバ $f(z)$ ハ $|z|<1$ デ単葉デアル。

<u>定理 4'</u>　$f(z)=z+\cdots$ ガ $|z|<\rho$ $(\rho>1)$ デ正則ナルトキ，若シ

$$\infty>|f'(z)|>e^{-\frac{\pi}{4}(\rho-\frac{1}{\rho})}\qquad |z|<\rho$$

ナラバ $f(z)$ ハ $|z|<1$ デ単葉デアル。

吉田耕作君ガ $f(z)=z+\cdots\cdots$ ガ $|z|<\rho$ $(\rho>1)$ デ正則ナルトキ $|z|<\rho$ デ $|f'(z)|>m(\rho)$ ナラバ $f(z)$ ガ $|z|<1$ デ単葉トナルガ如キ $m(\rho)$ ノ存在ヲ注意シタ由デアルガ，ソノ $m(\rho)$ トシテ $e^{-\frac{\pi}{4}(\rho-\frac{1}{\rho})}$ ヲトルコトガ出来ル。定理 4 及ビ 4' ノ右辺ノ制限ガ正確ナモノカドウカハマダ吟味シテヰナイ。

次ニ話ヲカヘテ $f(z)$ ノ複葉性ニ関シテ一ツノ注意ヲシテ置キマセウ．

$f(z)$ ヲアル領域 D デ正則トシ，相異ル $p+1$ 個ノ点

$$z_1,\ z_2,\ \cdots\cdots,\ z_{p+1}$$

デ同ジ値ヲ取ッタトスル。凡テノ点 z_i $(i=1,2,\cdots,p+1)$ ヲ内部ニ含ム任意ノ単純ナ閉（正則）曲線ヲ C トスレバ

$$\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\cdots\cdots(\zeta-z_{p+1})}=0$$

証明ハ簡単デス。先ヅ Cauchy ノ定理カラ　$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$

1°　$p=1$ ノトキハ

$$f(z_1)-f(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_1}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_2}\right)d\zeta=\frac{z_1-z_2}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}d\zeta=0$$

2°　$p=m$ ノトキニ真トシテ $p=m+1$ ヲ証明スル。

$z_1, z_2, \cdots\cdots, z_{m-1}, z_m \qquad (m ケ) \qquad$ i)

$z_1, z_2, \cdots\cdots, z_{m-1}, z_{m+1} \qquad (m ケ) \qquad$ ii)

ヨッテ仮定ヨリ

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\cdots(\zeta-z_{m-1})(\zeta-z_m)}\,d\zeta = 0 \qquad \text{i)}'$$

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\cdots(\zeta-z_{m-1})(\zeta-z_{m+1})}\,d\zeta = 0 \qquad \text{ii)}'$$

辺々相減ジテ

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\cdots(\zeta-z_m)(\zeta-z_{m+1})}\,d\zeta = 0$$

注意、上ノ事実ハ $z_1, z_2, \cdots, z_{p+1}$ ガ一部或ハ全部ガ一致シテモ成立スルコトハ明カデアル。コノ結果ヲ用ヒルト市原氏ノ巾級数ノ複葉性ニ関スル定理ノ証明（Jap. Journ. of Math. X, 1933, 71-78）ガ大変簡単ニナル。

$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_p z^p + \cdots$ ヲ $|z|<R$ デ正則且ツ少クモ $p+1$ 葉トスレバ相異ル $p+1$ ケノ点 z_i デ同ジ値ヲトルカラ今凡テノ z_i ヲ内部ニ含ム同心円 $|z|<R'(<R)$ ヲ C トスレバ前述ノ結果カラ

$$\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\cdots(\zeta-z_{p+1})} = 0$$

又ハ

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\left(1-\frac{z_1}{\zeta}\right)\left(1-\frac{z_2}{\zeta}\right)\cdots\left(1-\frac{z_{p+1}}{\zeta}\right)}\,\frac{d\zeta}{\zeta^{p+1}} = 0$$

$C: |z| = R'$ 上デハ

$$\left(1-\frac{z_i}{\zeta}\right)^{-1} = 1 + \frac{z_i}{\zeta} + \frac{z_i^2}{\zeta^2} + \cdots + \frac{z_i^n}{\zeta^n} + \cdots\cdots$$

従テ

$$\prod_{i=1}^{i=p+1}\left(1-\frac{z_i}{\zeta}\right)^{-1} = 1 + \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2} + \cdots + \frac{A_n}{\zeta^n} + \cdots\cdots,$$ ト展開サレ

A_n ハ z_i ノ有理整式デ係数ハ正ダカラ $|z_i|$ ($i=1,2,\cdots,p+1$) ノ
最大ヲ ρ トスレバ明ニ

$$\ll \left(1-\frac{\rho}{\zeta}\right)^{-(p+1)} = 1+\binom{p+1}{1}\frac{\rho}{\zeta}+\binom{p+2}{2}\frac{\rho^2}{\zeta^2}+\cdots+\binom{p+n}{n}\frac{\rho^n}{\zeta^n}+\cdots$$

即チ $\quad |A_n| \leqq \binom{p+n}{n}\rho^n$

$$\int_C (a_0+a_1\zeta+a_2\zeta+\cdots+a_p\zeta^p+a_{p+1}\zeta^{p+1}+\cdots+a_{p+n}\zeta^{p+n}+\cdots)\times \left(1+\frac{A_1}{\zeta}+\cdots+\frac{A_n}{\zeta^n}+\cdots\right)\frac{1}{\zeta^{p+1}}d\zeta=0$$

ヨリ

$$a_p+a_{p+1}A_1+a_{p+2}A_2+\cdots+a_{p+n}A_n+\cdots=0$$

$$|a_p| \leqq \sum_1^\infty |a_{p+n}||A_n| \qquad \text{故ニ,} \quad |a_p| \leqq \sum_1^\infty \binom{p+n}{n}|a_{p+n}|\rho^n$$

従テ市原氏ノ定理ヲ得ル.

定理(市原氏) $\quad f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_pz^p+\cdots$

ガ $\quad |a_p| \geqq \sum_1^\infty |a_{p+n}|\binom{p+n}{n}R^n$

ナラバ $f(z)$ ハ $|z|<R$ デ正則且ツ $|z|<R$ デ高々 p-葉デアル。

証明ハ $p+1$ ノ回同ジ値ヲトルトスレバ $R_1<R$ ニ対シテ

$$|a_p| \leqq \sum_1^\infty |a_{p+n}|\binom{p+n}{n}R_1^n$$

トナリ之レハ矛盾デアル。 (9. 9. 17 受取)