29. 或積分方程式ノ固有値問題

河口商次（北大）

専門家カラ見レバ誠ニツマラナイコレカモ知レナイガ幾何学ノ見方カラ起ツタ問題デ幾ラ文献ヲ探シテモ見当ラナイノデ専門家ノ助力ヲオ借リシタイト思ツテコノ紙上ヲオ借リスル。

問題ハ Hilbert ノ第三種積分方程式

$$\varphi(x)=A(x)f(x)+\int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

ニ関スルモノデ此ノ方程式ヲ linear operator ト見做シ

$$\varphi(x)=Lf(x)$$

ト考ヘル。ソノトキ $\varphi(x)$ ト $f(x)$ トガ常数ノ比丈デ異ルコトガアルカ。即

(1) $$\frac{1}{\lambda}f(x)=A(x)f(x)+\int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

ノ固有値問題デアル。特ニ $A(x)$ ガ常数デアルナラバコノ問題ハ Fredholm 積分方程式ノ固有値問題トナル。又 $\frac{1}{\lambda}$ ガ常数デナク $A(x)$ ニ常数ガ掛ツタモノデアレバ

$$A(x)f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

トナツテ之ハ Hilbert ガ既ニ論ジテヰル。然シ (1) ニ関シテハ誰モヤツテヰナイ様ナノデ今迄得タ結果ヲ述べ併セテ未解決部分ヲ提示シヨウ。先ヅ今迄得タ結果ハ

(1) 一般ニ固有値即チ $D\left(\frac{\lambda K(x,y)}{\lambda A(x)-1}\right)=0$ ノ根ガ必ズ存在スルトハ限ラナイ。$A(x)\equiv\text{const.}$ ノトキデサヘサウデアルカラ

(2) (1)ガ恒等的零デナイ連続解ヲモツ為ニハλガ固有値デアルコトガ必要十分デアル。

証明スルニハ(1)ヲ変形スレバ $\dfrac{\lambda K(x,y)}{\lambda A(x)-1}$ ヲ核ニスル同次方程式ニナルカラソレニFredholmノ理論ヲ其儘適用スレバヨイ。

(3) λガ固有値デ $D\left[\dfrac{\lambda K(x,y)}{\lambda A(x)-1}\right]$ ノ階数ガqデアレバ(1)ノ解ハq個ノ函数$f_j(x)$デ

$$f(x)=\sum_{i=1}^{q} c_i f_i(x)$$

ト表ハサレル。

(4) 固有値ハ$K(x,y)$, $\bar{K}(x,y)=K(y,x)$ニ対シテ同一デアル。階数モ等シイ

(5) λヲ$K(x,y)$ノ一ツノ固有値, μヲ$\bar{K}(x,y)$ノλトハ異ナル固有値トスレバソレラニ対応スル固有函数$f(x)$, $\bar{f}(x)$ノ間ニハ

$$\int_a^b f(x)\bar{f}(x)\,dx=0$$

即チ直交関係ガアル。

(証明)
$$\frac{1}{\lambda}f(x)=A(x)f(x)+\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy$$
$$\frac{1}{\mu}\bar{f}(x)=A(x)\bar{f}(x)+\int_a^b \bar{K}(x,y)\bar{f}(y)\,dy$$

第一式ニ$\bar{f}(x)$ヲ第二式ニ$f(x)$ヲ乗ジテ相減ジ積分スレバ

$$\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}\right)\int_a^b f(x)\bar{f}(x)\,dx=0$$

$\lambda\neq\mu$デアルカラ証明デキタコトニナル。之カラ次ノ事ガ云ヘル。

(6) $K(x,y)$ ガ対称ナラバ固有値ノ異ナル固有函数ハ直交スル。

(7) $A(x)$, $K(x,y)$ ガ共ニ実デ $K(x,y)$ ガ対称デアレバソノ固有値ハ必ズ実デナケレバナラナイ。

(証明) 複素数 λ ガ固有値デアレバ共軛数 $\bar{\lambda}$ モ亦固有値ニナリソレラニ対スル固有函数 $f(x)$, $\bar{f}(x)$ モ亦互ニ共軛デアル。然ルニ(6)ニヨッテ $\lambda \neq \bar{\lambda}$ デアルカラ $f(x)$, $\bar{f}(x)$ トハ直交スル。之ハ矛盾デアル。

大体以上ノコトハ簡単ニ証明出来ルノデアルガ $K(x,y)$ ガ実デ対称デアルトキ固有値ガ存在スルカドウカハ一寸証明出来ナイ。即チ $D\left[\frac{\lambda K}{\lambda A-1}\right]$ ガ λ ノ整函数デナイカラ Hilbert ノ理論トハ同ジヤウニハ行カナイカト思ハレル。又固有函数デ $K(x,y)$ ヲ展開スルコトモ簡単ニハ行カナイ様デ

$$\sum_n \left(\frac{1}{\lambda_n} - A(x)\right)^2 f_n^2(x) \leqq \int_a^b K^2(x,y)\,dy$$

式ハ証明デキル。コノ他 Hilbert ノ理論ト同ジ様ナ理論ガ出来レバ都合ヨイノデアル。以上未解決ノ部分ニ対シテ解答ヲ求メタイ。

(9.9.7 受取)