28. Derived Fourier series ノ Absolute Summability (A) ニツイテ

高橋龍夫 (東北大)

紙上談話会 第7号デ 佐藤徳意氏ガ $f(\theta)$ ノ derived Fourier series

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)$$

ノ absolute Summability (A) ヲ研究サレテオル。ソシテ (1) ガ absolutely summable (A) ナル為メノ充分條件トシテ

$$(2)\quad \int_0^\delta \frac{|\psi(t)|}{t^2}\,dt \ (\delta>0) \quad \text{コヽニ}\ \psi(t)=f(\theta+t)-f(\theta-t)$$

ノ existence ヲ証明サレタ。ソノ証明ハ (1) ヨリ作ッタ Poisson sum ヲ直接計算シテヤラレテオル。今年ノ Proc. Edinburgh Math. Soc. (part 1) デ L. S. Bosanquet ガ通常ノ Fourier series ノ absolute Summability ニ対シテ J. M. Whittaker, B. N. Prasad 等ヨリモ一般ノ條件ヲ与ヘテオル。今 derived Fourier series ニ付テノ吾々ノ問題ヲ Bosanquet ノヤッタ結果ガバツノ方法ニ帰着シヤウト試ミテ見ルト (2) ヨリモモット広イ條件ヲ与ヘル事ガ出来ル。

今
$$\Psi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-u)^{\alpha-1}\psi(u)\,du, \quad \alpha>0$$
$$t^{-\alpha}\Psi_\alpha(t) = \psi_\alpha(t), \quad \psi_0(t)=\psi(t) \ \text{トオク。}$$

(2) ヨリモ $\int_0^\delta \frac{|\psi_\alpha(t)|}{t^2}dt$ ノ existence ノ方ガ一般的ナ事ハ明ラカデアル ($\alpha>1$ ナラバ)

又
$$\int_0^\delta \left|\frac{d\left(\frac{\psi_{\alpha+1}(t)}{t}\right)}{dt}\right| dt \le \int_0^\delta \frac{|\psi'_{\alpha+1}(t)|}{t}dt + \int_0^\delta \frac{|\psi_{\alpha+1}(t)|}{t^2}dt$$
$$= \alpha\int_0^\delta \frac{|\psi_\alpha(t)-\psi_{\alpha+1}(t)|}{t}dt + \int_0^\delta \frac{|\psi_{\alpha+1}(t)|}{t^2}dt$$

デアルカラ α ヲ fix シナケレバ $\int_0^\delta \frac{|\psi_\alpha(t)|}{t}dt$ ノ existence ヨリモ $\frac{\psi_\alpha(t)}{t}$ ガ $(0,\delta)$ デ bounded varition ノ函数デアルトイフ事ノ方ガ広イ。ソコデ筆者ハ之ガ充分條件ニナル事ヲ示サウ。($\frac{\psi_\alpha(t)}{t}$ ガ bounded variation ナラバ $\frac{\psi_\beta(t)}{t}$ (但シ $\beta>\alpha$) 又左様ナル事ハ Bosanquet ヨリ分ッテオル。) 即チ

定理. $\frac{\psi_x(t)}{t}$ が $(0,\delta)$ デ bounded variation ノ函数ナル如キ x ガアレバ (1) ハ absolutely summable (A) デアル。

証明スベキ事ハ $\int_0^1 \left| \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\pi \psi(t)\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}dt \right| dx$ ノ存在デアル。

之ニハ、$\int_0^1 \left| \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\eta \psi(t)\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}dt \right| dx \quad \left(0<\eta<\frac{\pi}{2}\right)$ ノ existence サヘ云ヘバヨイ。今

$$K(x,t)=K=\frac{1-x^2}{1-2x\cos t+x^2}$$

$$M(x,t)=M=\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}$$

トオクト

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=-2\frac{\partial K}{\partial t}-2x\frac{\partial^2 K}{\partial x\partial t}$$

トナル事カラ吾々ノ問題ニオイテ M ヲ含ム計算ガ K ヲ含ム計算ニ reduce サレル。

$$\int_0^1 \left| \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\eta \psi(t)\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}dt \right| dx$$

$$\leqq 2\int_0^1 \left| \int_0^\eta \psi(t)\frac{\partial K}{\partial t}dt \right| dx + 2\int_0^1 \left| \int_0^\eta \psi(t)\frac{\partial^2 K}{\partial x\partial t}dt \right| dx$$

(i) 第二ノ積分ハ Bosanquet ノ論文中ヨリ添字ノ α ヲ $\alpha+1$ デオキカヘ、途中ノ Ψ_α ハ Ψ_α デ又 explicit ニ出テ来ル $\Phi_\alpha(t)$ ハ $\frac{\psi_\alpha(t)}{t}$ デオキカヘルト後ハ同ジデアル。

(ii) 第一ノ積分ヲ取扱フニモ Bosanquet ト同一ノ方法及ビ Estimation ガアテハマル。即チ

$$(3)\qquad \left|\frac{\partial^{r+1}}{\partial t^{r+1}}K(x,t)\right| \begin{cases} \leqq At^{-2-r} \\ \leqq A(1-x)^{-2}t^{-r} \end{cases} \quad (r\text{ ハ負ニナラヌ整数})$$

(実ハモウ少シ精密ニナルガ之デ充分デアル。) トシ (Bosanquet, Lemma 4)

$$\int_0^t K(x,u)\,du=O(t)$$ カラ (3) ヲ用ヰ、Induction ニヨルト

$$\int_0^t u^r\frac{\partial^r}{\partial u^r}K(x,u)du \begin{cases} \leqq At^{-1} \\ \leqq A(1-x)^{-2}t \end{cases}$$

ガ得ラレ (i) ト全ク同様ナ置換ガ証明サレル。以上ノ定理ハ直接 M ヲ含ム積分ヲ estimate シテモ出来ル筈デアルガ既ニ K ノ estimation ガアルノデ之ニ reduce シタ迄デアル