26. 有理函數ニツイテ

清水辰次郎（阪大）

全有限平面デ meromorphic ナ函數 $f(z)$ ニ對シテ

$$A_1(r,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{|f'(z)|}{(1+|f(z)|^2)^2}\rho\,d\rho\,d\theta,\qquad z=\rho e^{i\theta}.$$

トオケバ

$$\int_\varepsilon^r \frac{A_1(t,f)}{t}\,dt = T(r,f)+O(1)$$

デアル。コノ $T(r,f)$ ハ R. Nevanlinna ガ有理型函數ノ理論ニ導入シタ函數デアル。筆者ハ數學輯報 1927, 第6巻, 第1号 129頁デ $f(z)$ ガ有理函數ナラバ $A_1(r,f)$ ガ有界トナリ, 逆ニ $A_1(r,f)$ ガ有界ナラバ $f(z)$ ガ有理函數トナルコトヲ示シタ。コノハ $T(r,f)=O(\log r)$ ガ有理函數デアルタメニ必要且十分ダトユフ Nevanlinna ノ定理ヨリ直グ出ルノダガ, 有理函數ニ對シテハ $A_1(r,f)$ ノ方ガ $T(r,f)$ ヨリ簡單ナ意味ヲモツテヰルノダカラ直接ニ $A_1(r,f)$ ノ性質ヲ使ツテ證明スルノガ順序ダト思ハレル。

$f(z)=\dfrac{P_1(z)}{P_2(z)}$, （$P_1(z), P_2(z)$ ハ有理整函數） トオケバ

$$A_1(r,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{|P_1'P_2-P_1P_2'|^2}{(|P_1|^2+|P_2|^2)^2}\rho\,d\rho\,d\theta \le \frac{1}{\pi}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} 〃\ \rho\,d\rho\,d\theta+\frac{1}{\pi}\int_{r_0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{K}{\rho^4}\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$z=\rho e^{i\theta}$$

コノニ K, r_0 ハ十分大キイ常數デアル。何者、$P_1(z), P_2(z)$ ノ次數ヲ夫々 n_1, n_2 トスレバ $n_1\neq n_2$ ナルトキハ明カニ $P_1'P_2-P_1P_2'$ ノ次數ハ $|P_1|^2+|P_2|^2$ ノ次數ヨリ少クトモ 2 低ク, $n_1=n_2$ ナルトキモ $P_1'P_2-P_1P_2'$ ノ最高次ノ項ガ消エルタメ少クトモ 2 低イ。ヨツテ r_0, K ヲ十分大キクトツテオケバヨイ。コレヨリ

$$A_1(r,f)=O(1)$$

次ニ $A_1(x,f)$ ガ有界ナラバ $f(z)$ ハ有理函數デナケレバナラヌコトヲ示サウ。假リニ $f(z)$ ガ有理函數デナイトスレバ ∞ ハ $f(z)$ ノ孤立眞性特異点トナルカラ $f(z)$ ガ領域ヲ領域ニ寫像スルト云フ性質ヲ使ヘバ Weierstrass ノ定理カラ適當ニ α_0 ヲトレバ $f(z)=\alpha_0$ ガ ∞ 近傍デ無限ニ多クノ根ヲモツヨウニスルコトガ出来ル。（例ヘバ竹内端三先生：岩波講座，楕円函數論 IV，163–165頁）。モットモ上ノコトハ Picard ノ定理カラ直グ得ラレルノダガ成ル可ク初等的ニ証明シナイト面白クナイノデ Weierstrass ノ定理ヲ使ッタノデアル。（$\alpha_0 \neq \infty$ トスルコトモデキル）

シカルニ、一方，任意ノ $\alpha\ (\neq\infty)$ ニ対シテ $L_\alpha(f)=\dfrac{|\alpha|^2 f+\alpha}{|\alpha|\,(f-\alpha)}$ トオケバ

$$\frac{|dL_\alpha(f)|}{1+|L_\alpha(f)|^2}=\frac{|\alpha|^2\,(1+|\alpha|^2)\,|df|}{|\alpha|^2\,|f-\alpha|^2+\left|\,|\alpha|^2 f+\alpha\,\right|^2}$$

$$\begin{aligned}|\alpha|^2|f-\alpha|^2+\left|\,|\alpha|^2f+\alpha\,\right|^2&=|\alpha|^2(f-\alpha)(\bar f-\bar\alpha)+(|\alpha|^2f+\alpha)(|\alpha|^2\bar f+\bar\alpha)\\&=|\alpha|^2\,(1+|\alpha|^2)(1+|f|^2)\end{aligned}$$

デアルカラ

$$\frac{|dL_\alpha(f)|}{1+|L_\alpha(f)|^2}=\frac{|df|}{1+|f|^2}\qquad\therefore\quad A_1(x,L_\alpha(f))=A_1(x,f)$$

(実ハ，L_α ハ Riemann sphere ノ上デ考ヘレバ α ニ相當スル点ヲ ∞ ニ相當スル点ヘモッテユク，球自身ノ回轉デアル)

ヨッテ筆者ノ前掲論文 123頁 Theorem I ニヨリ

$$A_1(x,f)=A_1(x,L_\alpha(f))=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left.\frac{\partial\log(1+|L_\alpha(f)|^2)}{\partial x}\right|_{z=xe^{i\theta}}x\,d\theta+n(x,\alpha)$$

$A_1(x,f)$ ハ beschränkt ダカラ、コレヨリ　$(A_1(x,f)\leqq K)$

$$\int_{R_0}^{R}(K-n(x,\alpha))\,d\log x\geqq\left[\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log(1+|L_\alpha(f)|^2)_{z=xe^{i\theta}}\,d\theta\right]_{x=R}-\Big[\ \ 〃\ \ \Big]_{x=R_0}$$

右辺ノ第一項ハ $\geqq 0$ ダカラ

$$\int_{R_0}^{R}(K-n(x,\alpha))\,d\log x\geqq C(f,\alpha,R_0)$$

$C(f,\alpha,R_0)$ ハ f,α,R_0 ノミニ関係スル常數。コヽデ $\alpha=\alpha_0$ トトレバ矛盾ガオコル。$n(x,\alpha)\uparrow\infty$ ナラバ