

2.5. 函数、単葉性、一判定条件

7.

高橋進一 (阪大)

$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ が $|z| < 1$ で単葉かつ剰り遠ハタイ様ナ
 domain = 島像スルホ $f(z)$ ハ $|z| < 1$ 内 schlicht = 内コトハ想像
 内"ホルカト" 程度迄 $f(z)$ が $z = 接点 \Rightarrow 内居レハ$ 十分デ"アルカ?

コト = 答スル一ツノ答トシテ次ノ定理ヲ証明シヨウ。

$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ が $|z| \leq \rho$ ($\rho > 1$, 任意) 内"正則ナ
 解析函数トスルホ $|z| = \rho$ 内内周ル内"

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^2} \quad (< \sqrt{2})$$

内内関係カ"アルハ" $f(z)$ ハ $|z| < 1$ 内 schlicht トナル。

証明ハ至リ内簡單内"アル。先ツ" $f(z)$ ヲ

$$(1) \quad f(z) = z + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta) - \zeta}{(\zeta - z)} d\zeta$$

内内形 = 表ハシ = 次 = z_1, z_2 ヲ単葉内内内、任意ノ点トスレバ" (1) ヲ

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta) - \zeta}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\zeta$$

トナル。故ニ $f(z)$ が $|z| < 1$ 内 schlicht トナル事 = ハ

$$(2) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta) - \zeta}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\zeta \right| < 1$$

内内関係カ"アルハ" 十分内"アル。 (2) ノ左辺 = Schwarz ノ不等式ヲ使フト

$$(3) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta) - \zeta}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\zeta \right| \leq \frac{\rho}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |f(\zeta) - \zeta|^2 d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|\zeta - z_1|^2 |\zeta - z_2|^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{\rho}{2\pi} \left[2\pi \left(\int_0^{2\pi} |f(\zeta)|^2 d\theta - \rho^2 \right) \frac{2\pi}{(\rho-1)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\rho}{(\rho-1)^2} (M^2(\rho) - \rho^2)$$

但し $M(p) = \max_{|z|=p} |f(z)|.$

8

故に

$$(4) \quad \frac{p}{(p-1)^2} (M^2(p) - p^2)^{\frac{1}{2}} < 1$$

が成立スレバ $f(z)$ は $|z| < 1$ で "schlicht" ナル。

(4) を書き直すと

$$M(p) < p \sqrt{1 + (1 - \frac{1}{p})^4}$$

$f(0) = 0$ ナリコレハ又

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < \sqrt{1 + (1 - \frac{1}{p})^4} \quad |z| = p$$

ト書ケル。

$f(z)$ が $|z| \leq p$ で "pole" を除いて正則且 $\alpha \neq 0$ となる
 $f(z) \neq 0$ ナレバ $|z| = p$ ナル圓周上で $|f(z)| > m(p)$ ナル
 不等式ヨリ $f(z)$ の單位圓内ニ於ケル單葉性ガ云ヘル様
 ナ $m(p)$ ガ存在スル事ハ以前 Bieberbach ガ証明シタ
 事ガアル。

次に $f'(z)$ に対する條件カ $f(z)$ の單位圓内ニ於ケル單
 葉性モ云ヘナイ事ハナイ。

今 $|z| \leq p$ で $f(z)$ が正則ナリトシ

$$\max_{|z|=p} |f(z)| = M(p), \quad \max_{|z|=p} |f'(z)| = M'(p)$$

ナレバ Borel の不等式ニ依テ

$$M(p) < p M'(p)$$

故に最初ニ述べタ定理デ不等式ヲ

$$|f'(z)| < \sqrt{1 + (1 - \frac{1}{p})^4} \quad (< \sqrt{2})$$

9.

ト置換ハバ"定理ハ尚更成立スル譯デアリ。

最後ニ $|f'(z)| > m(p)$, $|z|=p$ ナル條件カラ $f(z)$ ノ單葉性ヲ云々スル事ハ出来ナイ様デアリ。角谷君ハ次ノ例デアリカ
即チ $f(z) = z + \frac{z}{2} z^n$ トスバ $f'(z) = 1 + z^{n-1}$ デアルカラ $|f'(z)| > 2p^{n-1} - 1$ $|z|=p > 1$

故ニ如何ナル $m(p)$ ガ存在シテモ其ガ p ノ定ツタ函数デアリ限リ n ヲ充分大キクトレバ $2p^{n-1} - 1 > m(p)$ 依テ $|f'(z)| > m(p)$ 然ルニ $f'(z)$ ハ $z = (-\frac{1}{2})^{\frac{1}{n-1}}$ ナル處テ零トナルカラ明ラカニ $f(z)$ ハ單位圓内テ schlicht トハナラヌ。

是テ見ルト唯成圓周上テ $|f'(z)| > m > 0$ ヲ假定シテモ巧クユカヌ様デアリカ z ノ domain 全体テ假定スレバ又話ハ別デアリ。實際 normal family ノ理論カラ

$$|f'(z)| > m(D) > 0 \quad (z \text{ ハ領域 } D \text{ 内ノ任意ノ點})$$

ナル制限ノ下ニ $f(z)$ ガ D 内ヲ schlicht ナル事カ云ヘル様ナ $m(D)$ ガ存在スル事ハ吉田君ノ御注意ヲ知ツタ。此處テ特殊ナ $D = \text{対}$ シテ $m(D)$ ノ値ヲ或程度迄決定スル事カ出来タラ大変面白ク思フ。