20. Schwarz ノ定理ノ簡単ナ証明

佐藤徳意 (北大)

先月末カラ今月ノ始メニカケテ札幌デ中等教員ノ講習会ガ行ハレマシタガ，吉田先生ガソノ講義デ Schwarz ノ一般化サレタ二次導函数ガ零デアル様ナ連続函数ハ一次函数デアルトイフコトヲ証明スル際ニ凸函数ニ関スル次ノ簡単ナ性質ヲ Lemma トシテ必要デアルトイフノデ談話会ニ於テ提出サレタモノヲ証明シテ見マシタ。凸函数ノ証明法ヲ分解シタモノニナルノデスガ，此形ニシタ方ガ解リ易イト思フノデ書イテ見マシタ。

Lemma 1.

函数 $f(x)$ ハ (a,b) デ定義サレタ連続函数トスル。(a,b) ノ各点 x デ $\delta(x)$ ガ定義サレテ，

$$0 < h < \delta(x)$$

ナル h ニ対シテ

$$f(x+h) + f(x-h) \geqq 2f(x)$$

成立スルナラバ，$f(x)$ ハ convex デアル。

証明

$x_1 < x < x_2$ ナラバ

$$f(x) \leqq \frac{x-x_2}{x_1-x_2} f(x_1) + \frac{x_1-x}{x_1-x_2} f(x_2)$$

デアルコトヲ証明スル。

1) $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ノトキ.

$f(x) \leqq 0$ ヲ示ス。モシ $f(x) > 0$ ナル x ガアレバ

$f(x) = \max.$ ニナル x ハ (x_1, x_2) ニ属スル。カヽル x ノ上端ヲ

x_0 トスル。然ル時ハ $f(x_0) = M (= \max.)$ デアッテ、

$$x_0 < x_2 \qquad (\because M > 0)$$

ソコデ h ヲ充分小サクトリ且ツ $0 < h < \delta(x_0)$ ナラシメルト

$$f(x_0 + h) < M = f(x_0)$$

$$f(x_0 - h) \leqq M = f(x_0)$$

ガ成立スル。故ニ

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) < 2f(x_0)$$

コレハ仮設ニ矛盾スル。故ニ

$$f(x) \leqq 0$$

(ii) 一般ノ場合。

$$\varphi(x) = f(x) - \left[\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} f(x_2) \right]$$

トオク。然ルトキハ

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$$

デシカモ $0 < h < \delta(x)$ ナル h ニ対シテ

$$\varphi(x+h) + \varphi(x-h) \geqq 2\varphi(x)$$

ガ成立スル 即 (i) ノ場合ニナル故

$$\varphi(x) \leqq 0$$

言ヒ換ヘルト $f(x) \leqq \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_2} f(x_2)$.

Lemma 2.

$f(x)$ ガ (a,b) デ convex デ且ツ concave ナ連続函数ナラバ

$f(x)$ ハ一次函数ナリ.

証明ハ簡単デアルカラ略ス.

$f^{(2)}(x)$ ヲ以テ一般化サレタ二次導函数ヲ表ス.

即チ $$f^{(2)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

定理.

$f(x)$ ガ (a,b) デ定義サレタ連続函数デ, (a,b) ノ各点デ $f^{(2)}(x)$ ヲ有シ $f^{(2)}(x) \geqq 0$

トスル. 然ル時ハ $f(x)$ ハ (a,b) デ convex ナリ.

証明

i) $f^{(2)}(x) > 0$ ナル時:

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x) > 0, \quad 0 < h < \delta(x).$$

故ニ Lemma 1 ニヨリ $f(x)$ ハ (a,b) デ convex デアル.

ii) $f^{(2)}(x) \geqq 0$ ナル時

$$f_n(x) \equiv f(x) + \frac{1}{n} x^2 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

トオク. $f_n^{(2)}(x) = f^{2}(x) + \frac{1}{n} > 0$

依ッテ, $f_n(x)$ ハ i) ノ場合ノ条件ヲ凡テ満足スル。依ッテ

$f_n(x)$ ハ i) ノ場合ノ条件ヲ凡テ満足スル。故ニ $f_n(x)$ ハ (a,b)

デ convex ナリ. 従ッテ x_1, x_2 ヲ (a,b) ニ属スル勝手ナ

ニ点トユヘド直ニ次ノ関係ガ成立スル.

$$f_n(x_1)+f_n(x_2) \geqq 2f_n\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

即 $f(x_1)+f(x_2)+\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2) \geqq 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{2}{n}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$

コヽデ $n \to \infty$ ナラシメルト.

$$f(x_1)+f(x_2) \geqq 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

コノコトハ $f(x)$ ガ (a,b) デ convex ナルコトヲ示シテヰル.

依ツテ定理ハ証明サレタ.

同様ニシテ次ノ系ヲ得ル.

系.

定理ニ於テ $f^{(2)}(x) \leqq 0$ トスルト $f(x)$ ハ (a,b) デ ~~convex~~ concave ナリ.

定理ト系トヨリ Lemma ヲ用フルト次ノ Schwarz ノ定理ヲ得.

定理.

$f(x)$ ガ (a,b) デ定義サレタ連続函数デ $f^{(2)}(x)$ ヲ有シ (a,b) ノ各点デ $f^{(2)}(x)=0$ ナルトキハ $f(x)$ ハ (a,b) デ一次函数ナリ.

(9.8.18 受取)