全國紙上談話會第6号

16. Algebroid function ニツイテ

吉田耕作 (阪大)

Irreducible equation

$$f(x,y) \equiv A_0(x)y^\nu + A_1(x)y^{\nu-1} + \cdots\cdots + A_\nu(x) = 0,$$

$A_i(x)$ ハ $\sum_{i=0}^{\nu} |A_i(x)| \neq 0$ ナル如キ整函數

ノ根 $y(x)$ ヲ ν 價 algebroid トロ呼ブ. algebroid ニ對シテ Picard ノ定理ヲ擴張スルコトハ G. Rémoundos (Ann. Toulouse, 2e série, 1906), M. Varopoulus (Bull. Soc. math. France, 1925) 等ニヨツテナサレタ. シカシ有理型函數論ニ於ケル Nevanlinna ノ第二基本定理ノ形ニ於テ Picard ノ定理ヲ algebroid ニ擴張スルコトニ成功シタノハ極ク最近ノコトデアツテ H. L. Selberg (Math. Zeitschr. 1930), Valiron (Bull. Soc. math. Fr. 1931), E. Ullrich (Crelle 1931) 等ノ努力ニ負フ. ソレラノ結果ヲ述ベルナラバ

$|x| \leqq r$ ニ於ケル $f(x,a)=0$ ノ根ノ數ヲ multiplicity ヲ勘定ニ入レテ $n(r,a)$ トシテ $N(r,a) = \int_0^r \frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}dt + n(0,a)\log r$ ヲ定義スル.

又 $a=\infty$ ナルトキハ $|x| \leqq r$ ニ於ケル $\lim_{y\to 0} y^\nu f(x,\frac{1}{y})$ ノ zero ノ數ヲ $n(r,\infty)$ トスル. 更ニ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max_i \log|A_i(x)|\, d\theta = T(r,y)$$
$$x = re^{i\theta}$$

トスル.

然ラバ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_q$ ノガ互ニ相異ナル有限又ハ無限ノ complex number トスルトキ

$$(1) \qquad (q-2\nu)\,T(x,y) \leqq \sum_{i=1}^{q} N(x,a_i) + S(x)$$

但シ $S(x)$ ハ其ノ interval sum ガ有限ナル如キ x ノ値ヲ除ケバ $< O(\log x T(x,y))$

上ノ定理ハ $A(x)$ ガ一次獨立ナルトキハ H. Cartan ノ定理（拙著 "Wronskian ニ就テ"（紙上談話會第 3 号））ニヨツテ

$$(2) \qquad (q-\nu-1)\,T(x,y) \leqq \sum_{i=1}^{q} N_\nu(x,a_i) + S(x)$$

ト云フ精密ナ形デ得ラレル. 但シ $N_p(x,a_i)$ ハ a_i-point ヲ勘定スルトキ $s(>p)$ ple point ハ p 個ニ $s(\leqq p)$ ple point ハ s 個ニ勘定シタモノ.

H. Cartan ハ Mathematica (1933) ニ於テ (2) ヲ述ベ且ツ $A_i(x)$ ノ間ニ存在スル linear homogeneous relation ノ max. number ヲ λ トスルトキハ

$$(3) \qquad (q-\nu-\lambda-1)\,T(x) \leqq \sum_{i=1}^{q} N_{\nu-\lambda}(x,a_i) + S(x)$$

ガ成立スルダロウト豫想シテヰル. 既ニ Valopoulus（前掲論文）ガ $f(x,a)=0$ ノ根ガ有限ナル如キ a ノ個數ハ $\underline{\nu+\lambda+1}$ ヲ越エナイコトヲ証明シテ居ルカラ (3) ガ尤モラシイノデアロウ.

筆者ハ "Wronskian ニ就テ" トホボ同様ノ計算ニヨツテ

$$(4) \quad \left\{(q-\nu-1)\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)-\frac{\lambda}{\nu}\right\}T(x) \leqq \sum_{i=1}^{q} N_{\nu-\lambda}(x,a_i) + S(x)$$

ガ成立スルコトヲ証シ得タ.

定義ニヨツテ $0 \leqq \lambda \leqq \nu-1$ デアルカラ

$$(q-\nu-1)\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)-\frac{\lambda}{\nu} \geqq \frac{1}{\nu}(q-\nu-\lambda-1)$$

デアル. (4) ハ一般ニハ (3) ヨリハ悪イガ (2) 及ビ Varopoulus ノ定理, Nevanlinna ノ第二基本定理等ヲ含ム. 又或ル場合ニハ, (1), (3) ヨリモ遙カニ精密デアル.

<u>(4) ノ証明</u> 第一段。$a_1, a_2, \cdots, a_q$ ハ全テ有限トシテヨイ. sinon $a_1, a_2, \cdots, a_q$ ト異ル b (= finite) ヲモツテ来テ $F(x, y) = (y-b)^{\nu} f\left(x, \frac{y}{y-b}\right)$ ヲ取リ扱ヘバヨイカラ。

λ ニ対スル假定カラ $\sum_{i=1}^{\rho} |g_i(x)| \neq 0$, $\rho = \nu-\lambda+1$, ヲ満足スル一次獨立ナ整函數 $g(x)$ ニヨツテ

$$A_i(x) = \sum_{j=1}^{\rho} a_{ij} g_j(x), \quad i = 0, 1, \cdots, \nu$$

ト書ケル 從ツテ $f(x, y) \equiv \sum_{i=1}^{\rho} p_i(y) g_i(x)$, $p_i(y) = a_{0i} y^{\nu} + a_{1i} y^{\nu-1} + \cdots + a_{\nu i}$. 故ニ 1 カラ q マデノ integer ヲ任意ノ順序ニ並ベタモノヲ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q$ トスルトキ $f(x, a_{\alpha_\rho}), f(x, a_{\alpha_{\rho+1}}), \cdots, f(x, a_{\alpha_q})$ ノウチノ λ 個ヲ除イテ何レノ $f(x, a_{\alpha_i})$ モ $f(x, a_{\alpha_1}), \cdots f(x, a_{\alpha_{\rho-1}})$ ト一次獨立デアル。何者 y ニツイテ ν 次ノ polynomial

$$\Delta(y) = \begin{vmatrix} p_1(a_{\alpha_1}) & \cdots\cdots & p_\rho(a_{\alpha_1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1(a_{\alpha_{\rho-1}}) & \cdots\cdots & p_\rho(a_{\alpha_{\rho-1}}) \\ p_1(y) & \cdots\cdots & p_\rho(y) \end{vmatrix}$$

ハ λ ガ max. number トスル假定カラ $\neq 0$. 且 $\Delta(a_{\alpha_i}) = 0$, $i = 1, \cdots, \rho-1$ ダカラ.

第二段　以下 α ハ $|f(x,a_{\alpha_1})|\leqq|f(x,a_{\alpha_2})|\leqq\cdots\cdots$ ノ如ロクナツテ居ルトスル。即チ α ハ x ノ函數。然ラバ上ニ述ベタ一次獨立性ノ定義カラ，$j\geqq\nu+1$ ナラ

(5)　$$|g_i(x)|\leqq k\,|f(x,a_{\alpha_j})|\leqq K\cdot\max_{l}|g_l(x)|$$

ココニ k, K ハ a/ニニヨツテ定マリ $|x|\to\infty$ ノトキ borné。従ツテ $\sum_{i=1}^{q}|g_i(x)|\neq 0$ ニヨリ $f(x,a_{\alpha_j})\neq 0$, $j\geqq\nu+1$. 又

(6)　$$T(r,y)+O(1)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(x,a_{\alpha_j})|d\theta\ ,\ j\geqq\nu+1$$

（明カニ $T(r,y)=\frac{1}{2\pi}\int^{2\pi}\max_i\log|g_i(x)|d\theta+O(1)$ ）

第三段　$f(x,a_{\alpha_p}),\cdots\cdots,f(x,a_{\alpha_q})$ ノ中 $f(x,a_{\alpha_1}),\cdots,f(x,a_{\alpha_{p-1}})$ ト一次獨立ナモノハ第一段ニヨリ少クトモ $(q-\nu)$ 個アル。コレラノウチ絶對値最小ノモノヲ $f(x,a_\beta)$ トシ殘リヲ $f(x,a_{\beta_{p+1}}),\cdots,f(x,a_{\beta_q})$ トスル。然ラバ

$$W(g_1,g_2,\cdots,g_p)\equiv K(\alpha)W\big(f(x,a_{\alpha_1}),f(x,a_{\alpha_2});\cdots;f(x,a_{\alpha_{p-1}});f(x,a_\beta)\big)$$

ココニ W ハ wronskian ヲ示シ $K(\alpha)\neq 0,\infty$ 且ツ $K(\alpha)=O(1)$ デアル。故ニ"Wronskian ニ就テ"ニ於ケルト同様ノ計算ニヨツテ

$$\sum_{i=1}^{q}N(x,a_i)-\sum_{i=1}^{q}N_{\nu-\lambda}(x,a_i)-\sum_{s=p+1}^{q}N(x,a_{\beta_s})$$
$$\leqq\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{0\\x=re^{i\theta}}}^{2\pi}W(g_1,g_2,\cdots,g_p)d\theta$$
$$\leqq\sum_{i=1}^{q}N(x,a_i)+S(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{i=p+1}^{q}\log|f(x,a_{\beta_i})|d\theta$$

従ツテ

(7)　$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{i=p}^{q-1}K(i)\leqq\sum_{i=1}^{q}N_{\nu-\lambda}(x,a_i)+S(x).\\ \text{但シ}\quad\displaystyle K(i)=\frac{1}{2\pi}\int^{2\pi}\log|f(x,a_{\alpha_i})|d\theta-N(x,a_{\alpha_i})\end{array}}$$

第四段。 (5)ニヨツテ $N(x, a_{\alpha_i})=0$, $i \geqq \nu+1$。 ヨツテ (7)ノ左辺ハ (6)ニヨリ

$$(8) \quad \sum_{i=\rho}^{\nu} K(i) + (q-\nu-1)T(x) + O(1)$$

トコロガ $$\sum_{i=1}^{q} K(i) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F_1 \cdots F_q| d\theta - N(x, F_1F_2 \cdots F_q)$$

$$= O(1) \quad \text{(Jensen ノ公式)}$$

デアル。且ツ (6)ニヨツテ $\sum_{i=\nu+1}^{q} K(i) = (q-\nu)T(x) + O(1)$ デアルカラ

$$(9) \quad \sum_{i=1}^{\nu} K(i) = -(q-\nu)T(x) + O(1)$$

又定義カラ明カニ $K(1) \leqq K(2) \leqq \cdots\cdots \leqq K(q)$ デアルカラ (9)ニヨリ

$$(10) \quad \sum_{i=\rho}^{\nu} K(i) \geqq \frac{\lambda}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} K(i) \geqq -\frac{\lambda}{\nu}(q-\nu)T(x) + O(1)$$

(7), (8), (10) ヨリ

$$\left[(q-\nu-1) - \frac{\lambda}{\nu}(q-\nu)\right] T(x) \leqq \sum_{i=1}^{q} N_{\nu-\lambda}(x, a_i) + S(x)$$

コレ即チ (4) デアル。 c. q. f. d.

注意 Algebroid トミフコトハソレ程 essential ニ使ツテナイ。 $g_1, g_2, \cdots\cdots, g_\rho$ ノ linear combination $F_1, F_2, \cdots\cdots, F_q$ ニツキ第一段ニ於ケルガ如キ linear independence ノ條件ガ満足サレテヰルナラ

$$\left((q-\nu-1)\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right) - \frac{\lambda}{\nu}\right) T(x) \leqq \sum_{i=1}^{q} N_{\nu-\lambda}(x, F_i=0) + S(x)$$

$$T(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max_i \log|g_i(x)| d\theta. \quad x = re^{i\theta}$$

(9. 8. 6.)