全國紙上數學談話會第4号　　　　9.7.31.

11.　互ニ素ナル Diskriminante ヲ有スル Algebrenklasse ノ積ニツイテ

正田建次郎（阪大）

K: algebraischer Zahlkörper endlichen Grades.

A: Algebrenklasse über K.

$\mathfrak{p}$: Primideal in K.

$n_\mathfrak{p}$: $\mathfrak{p}$-Index von A.

イレバ. A ノ Diskriminante ハ

$$\mathfrak{d}_A = \prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}(n_\mathfrak{p}-1)} \tag{1}$$

デアリ, $\mathfrak{p}$-Index ダケデ決定サレマス. A ニ属スル Algebra Γ ノ Rang ガ n トスレバ Γ ノ Diskriminante ハ

$$\mathfrak{d}_\Gamma = \mathfrak{d}_A^{\,n} = \prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}(n_\mathfrak{p}-1)n} \tag{2}$$

デス. (学士院記事 10, No. 6)

コレカラ ニツノ Algebrenklassen A, B ノ Diskriminante ヲ互ニ素アルト假定シマス.

I　　　$\mathfrak{d}_A \mathfrak{d}_B = \mathfrak{d}_{AB}$

證. Hasse ノ $\mathfrak{p}$-Invariante $\left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right)$ ニツイテ

$$\left(\frac{AB}{\mathfrak{p}}\right) \equiv \left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right) + \left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right) \pmod{1}$$

トル関係式ガ成立シ $\left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right)$ ハ $n_\mathfrak{p}$ ヲ分母ニモツ既約分数デス. 故ニ A ト B ノ1ナラザル $\mathfrak{p}$-Index ガ一緒ニナッテ AB ノ1ナラザル $\mathfrak{p}$-Index ヲ作ルワケデス. 従ッテ (1) カラ I ガ得ラレマス.

$\Gamma, \mathfrak{T}$ ヲ夫々 Rang n, m ナル A, B ニゾクスル Algebra トスレバ (2) カラ

II $$\vartheta_{\Gamma\times\mathfrak{T}} = \vartheta_\Gamma^{m}\vartheta_\mathfrak{T}^{n}.$$

コレデ $\Gamma\times\mathfrak{T}$ ノ Diskriminante ガ分カリマシタカラ $\Gamma\times\mathfrak{T}$ ノ Ideal-theorie ハ Γ 及ビ $\mathfrak{T}$ ノ Idealtheorie ニ reduce サレマス.

Γ 及ビ $\mathfrak{T}$ ノ Maximalordnung ヲ $\mathfrak{o}_\Gamma$. $\mathfrak{o}_\mathfrak{T}$ トシ, ソノ Basis ヲ $e_1, e_2, \dots, e_n$; $f_1, f_2, \dots, f_m$ トスレバ mn 個ノ Elemente $e_i f_j$ ハ $\Gamma\times\mathfrak{T}$ ノ Ordnung ヲ作リマス. コレヲ $\mathfrak{o}_\Gamma\times\mathfrak{o}_\mathfrak{T}$ デ表ハスコトニスレバ

III $\mathfrak{o}_\Gamma\times\mathfrak{o}_\mathfrak{T}$ ノ Diskriminante ハ $\vartheta_\Gamma^{m}\vartheta_\mathfrak{T}^{n}$, 従ッテ $\mathfrak{o}_\Gamma\times\mathfrak{o}_\mathfrak{T}$ ハ $\Gamma\times\mathfrak{T}$ ノ Maximalordnung デアル.

証. 唯計算スレバ出テ来マス.

$$e_i e_j = \sum_k e_k a_{ij}^k, \quad f_i f_j = \sum_k f_k b_{ij}^k$$

トスレバ

$$e_i f_j e_{i'} f_{j'} = \sum_k e_k a^k_{ii'} \sum_l f_l b^l_{jj'} = \sum_{k,l} e_k f_l a^k_{ii'} b^l_{jj'}.$$

今

$$d^{kl}_{ij,i'j'} = a^k_{ii'} b^l_{jj'}$$

ト置ケバ

$$\sum_{k,l} d^{kl}_{ij,mn} d^{m'n'}_{kl,i'j'} = \sum_k a^k_{im} a^{m'}_{ki'} \sum_l b^l_{jn} b^{n'}_{lj'}$$

従ッテ $\mathfrak{o}_\Gamma\times\mathfrak{o}_\mathfrak{T}$ ノ Diskriminante ハ

$$\left|\sum_{k,l} d^{kl}_{ij,mn} d^{m'n'}_{kl,i'j'}\right| = \left|\sum_k a^k_{im} a^{m'}_{ki'}\right|^m \left|\sum_l b^l_{jn} b^{n'}_{lj'}\right|^n = \vartheta_\Gamma^m \vartheta_\mathfrak{T}^n.$$

次ニコノ Maximalordnung ノ中ノ Primideal ヲ考ヘテ見マス. $\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{o}_\Gamma$ ノ Ideal トスレバ $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_\mathfrak{T}$ ハ $\mathfrak{o}_\Gamma\times\mathfrak{o}_\mathfrak{T}$ ノ Ideal デアル. $\mathfrak{P}_\Gamma$ ヲ $\mathfrak{o}_\Gamma$ ニ於ケル p ノ Primteiler トスレバ $p = \mathfrak{P}_\Gamma^{n_p}$. $n_p > 1$ トスレバ Γ ト $\mathfrak{T}$ ノ Diskriminante ハ互ニ素ナル故 $p = \mathfrak{P}_\mathfrak{T}$. $p = \mathfrak{P}^{N_p}$ ヲ p ノ $\mathfrak{o}_\Gamma\times\mathfrak{o}_\mathfrak{T}$ ニ於ケル Zerlegung トスレバ N_p ハ $\Gamma\times\mathfrak{T}$ ノ p-Index デアルカラ若シ $m_p = 1$ ナラバ n_p ニ等シイ 故ニ

$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_\Gamma \mathfrak{o}_T$，若シ $m_\Gamma > 1$ ナラバ $n_\Gamma = 1$，デ

$$\mathfrak{P}_\Gamma \mathfrak{o}_T = (\mathfrak{P}_T \mathfrak{o}_\Gamma)^{m_\Gamma} = \mathfrak{g},$$

故ニ

IV　$\mathfrak{P}_\Gamma \mathfrak{o}_T$ ハ $m_\Gamma = 1$ ノ時ソノ時ニ限リ Primideal デアル

カクテスベテノ $\Gamma \times T$ ノ Primideal ガ得ラレ更ニコノ IV ニヨリ $\Gamma \times T$ ノ Idealtheorie ガ Γ 及ビ T ノ Idealtheorie ニ reduce サレル.

(軽井沢ニテ 24. 7. 1934.)

(訓覚 18.5.'50)

6.

<u>正誤</u>　互ニ素ナル Diskriminante ヲ有スル Algebren-klasse ノ積ニツイテ — 正田建次郎

一昨日訂正ヲ御書キシマシタガ中村正君ガ得ラレタ結果ニヨリマスト III ノ前半丈ガ間違ヒデ後半ハ矢張リ成立シマス。ソレハ im Kleinen デ考ヘテミマスト Diskriminante ガ互ニ素ナラバ Γ ト T トノドチラカガ必ズ zerfallen スル筈デスカラ $\mathfrak{o}_\Gamma \times \mathfrak{o}_T$ ガ im Kleinen デ従ッテ Hasse ノ定理ニヨリ im Grossen デモ Maximalordnung ニナリマス。コレデ III カラ後ノ事柄ハ矢張リ成立スル訳デス。中村君ハ更ニ逆モ証明サレマシタ。即チ $\mathfrak{o}_\Gamma \times \mathfrak{o}_T$ ガ Maximalordnung ニナレバ Γ ト T ノ Diskriminante ハ互ニ素ニナリマス。