9. 級數ノ Cesàro-Summation ニ関スル一問題

泉信一（東北帝大理學部）

推測定理. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ガ (C, r)-summable ナルタメノ必要且十分ナ條件ハ

$$a_n = A_n^{(\alpha)} \Delta^{\alpha} b_n \qquad (\alpha > 0)$$

ヲ満足スル數列 (b_n) ノウチ、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ガ $(C, r-\alpha)$-summable ニナルモノノ存在スル事デアル。茲ニ

$$A_n^{(\alpha)} = \binom{n+\alpha}{n}$$

及ビ、

$$\Delta^{\alpha} b_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{(-\alpha-1)} b_{n+\nu}.$$

此ノ定理ニ於テ $\alpha = 1$ トスレバ Hardy-Littlewood ノ定理ニナル。従ッテ此ノ定理ハ Hardy-Littlewood ノ定理ノ拡張ニナル。

コノ定理ノ十分ナ事ハ次ノ様ニシテ二項級數ニ関スル不等式ヲ證明スル事ニ導カレル。必要ナ事ハ同様ナ問題トモウ一ツ難シイ問題ニ出會フ。

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ノ r 次ノ Cesàro Sum ヲ $S_n^{(r)}$ トシ、$c_n^{(r)} = \dfrac{S_n^{(r)}}{A_n^{(r)}}$ トオク。$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ カヲ同様ニ $T_n^{(r)}$ 及ビ $d_n^{(r)}$ ヲ定義スル。然ルトキ、$\lim_{n\to\infty} d_n^{(r-\alpha)} = 0$ ナル事カラ $\lim_{n\to\infty} c_n^{(r)} = 0$ ナル事ガ證明出來レバ良イ。

定義カラ

$$c_n^{(r)} = \frac{S_n^{(r)}}{A_n^{(r)}} = \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(r)} a_\nu$$

$$= \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(r)} A_\nu^{(\alpha)} \Delta^{\alpha} b_\nu$$

$$= \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(r)} A_\nu^{(\alpha)} \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(-\alpha-1)} b_{\nu+\mu}$$

$$= \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(r)} A_\nu^{(\alpha)} \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(-\alpha-1)} \sum_{\lambda=0}^{\mu+\nu} A_{\mu+\nu-\lambda}^{(-r+\alpha-1)} \frac{d_\lambda^{(r-\alpha)}}{A_\lambda^{(r-\alpha)}};$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda} d_\lambda^{(r-\alpha)}, \text{ say}.$$

故ニ Toeplitz ノ定理カラ

$$1^\circ \quad \lim_{n\to\infty} a_{n\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots\cdots),$$

及ビ

$$2^\circ \quad \sum_{\lambda=1}^{\infty} |a_{n\lambda}| < M \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナル事ガ證明出來レバ良イ. 此ノ二ツノ條件ノウチ 1° ハ容易ニ證明出來ルガ 2° ハ出來ナカツタ.

此ノ問題ニ關シテハ Hardy - Littlewood, Math. Zeits., 19 (1922); Andersen Proc. London Math. Soc., 27 (1927); Winn, Journal London Math. Soc., 7 (1932), 參照.

更ニ此ノ種ノ問題ヲ解クトキニ役立ツ二項係數ノ不等式及ビ計算ニ就テハ Zygmund, Bull. de Cracovie, 1927; Winn, Proc. Edinburgh Math. Soc., 4 (1932) 參照.