

6. Homologiegruppe と Heegaard Diagramm と、関係

山松 醇 郎 (阪大理学部)

二次元閉集合体 (Mannigfaltigkeit), 種数 (Geschlecht) の Homologiegruppe が與ハラレバ決定サレル。所ガ三次元閉集合体, 種数 (ソノ Heegaard Diagramm, 標準曲面, 最小種数) = 就テハ之ヲ決定スベキ何等ノ方法モナ
 1. Alexander 〃現在ノ Topologie, 智識テハ殆ンド不可能デアラウト言フ。事實 Heegaard Diagramm, 標準曲面ノ種数, 上下ハ何ニ依ツテ影響サレルカト言フ事ハ全ク分ツテ居ナイ。 (最近ノ論文 K. Reidemeister:

Heegaarddiagramme und Invarianten von Mannigfaltigkeiten, Abh. math. Seminar Hamburgischen Uni., Bd 10,

ヲ見ル機ヲ得ナイ, テハ此ノ内容ニ就テハ知リマセシ。

今此ノ種数ニ或ル制限ヲ與ヘル所ノ關係ヲ求メル, 結果ハ一次元ベツチ数 p^1 トスレバソノ種数 g 〃 $g \leq p^1$ 。

此ノタメニソレ自身多少ノ興味ガアル所ノ一ツノ定理ヲ証明スル, ソレハ H. Seifert ノ次ノ定理ノ Verschärfung & E" Erweiterung.

H. Seifert: Homologiegruppen, besandeter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. (Math. Zeit., Bd 35).

境界アル三次元可符号集合体ノ一次元ベツチ数ハ境界ヲナス凡テノ曲面ノ種数ノ和ヨリ小トラス。即境界トシテ凡テ個ノ曲面, ソノ種数ヲ h_1, \dots, h_n トスレバ

$$p^1 \geq \sum_{i=1}^n h_i.$$

此処で果シテ $\rho^1 = \sum h_i$ とナル標 + 集合体が存在スルカドウカ、存在シタ
ナラバ如何ナルモノデアラウカヲ決定シ次ニ之ヲ $(2n+1)$ 次元ニ擴張スル。

定理1, ユークリッド空間ヲ n 個ノ, 種数 h_1, h_2, \dots, h_n ノ曲面ヲ境セ
ラレル集合体ノ一次元バツチ数 $\rho^1 = \sum h_i$.

境界ヲナス所ノ曲面ノ相互ノ位置 (Lage) = 関係シナイ所ガ重要. h_i ガ
凡テ等シイニツノ集合体ハバツチ数ハ等シイガ一般ニ homöomorph ナイ
証明、Mayer, Vietorisノ定理ヲ使フ。

W. Mayer: Über abstrakte Topologie. (Monatsheft, Math. u. Phys.,
Bd. 36)

L. Vietoris: Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier
Komplexe. (Monatsheft, Math. u. Phys., Bd 37).

Σ_1, Σ_2 ヲ n ツノ simplicialen Komplexe, Σ_3 ヲ n ノ Durchchnitt, Σ
ヲ n ノ Vereinigungskomplex トシテ夫レノ p 次元ノ Homologiegruppen
ヲ夫レ $\zeta_1^p, \zeta_2^p, \zeta_3^p, \zeta^p$ ナリト表ス. 又 Σ_3 ノ Zyklus τ Σ_1, Σ_2 何レ
ニテモ homolog 0 トナル標 + ζ_3^p ノ Untergruppe G^p トスルハ.

$$ii) \quad \zeta^p = \frac{\zeta_1^p \zeta_2^p}{\zeta_3^p} \cdot G^{p-1}$$

ユークリッド空間 = uneigentlicher Punkt — 是ヲ加ニ三次元球空間
 S^3 トシ此ノ中ニ種数 h_i ノ曲面ヲ verschlingen シナイ標 = トル. 此ノ
曲面ニ分サレタ境界アル集合体ハ互ニ homöomorph ナリ.

(H. Seifert: Topologie, S 57)

ii) 式ハバツチ数ガケ考ヘルハ

$$h^p = h_1^p + h_2^p - h_3^p + h^p + h^{p-1}$$

境界トシテ、曲面ヲ Σ_3 , S^3 ヲ Σ - トレバ $p = 1$, トキ $h^1 = 0$,
 $h_1^1 = h_2^1 = p^2$, $h_3^1 = 2h$, $\gamma^1 = \gamma^0 = 0$, 直チニ $p^1 = h$, $p^2 = 0$ ヲ得,
 次ニ出来タ種数 h 、曲面ノミヨ境界トスル集合体カヨ同様ニ出来タ種数 h'
 ノ曲面ヲ境界トスル集合体ト Homöomorphisch ノモ、ヲ取り出ス。コレヲ Σ_1 , 残
 リヲ Σ_2 , 共通ノ Komplex h' 、種数ノ曲面ヲ Σ_3 トスレバ

$$h_1 = p^2 + h' - 2h' + 0 + 0,$$

$$\therefore p^1 = h + h' \quad p^2 = 1.$$

$\gamma^1 = 0$ ナルコトハ S^3 カラ Σ_1 ヲトリ出スト考ヘレバ Σ_1 ノ境界ノ一次
 元位相合同類群ノ Basis テ Σ_1 テ $\text{homology } 0$ ナルモ、 $S^3 - \Sigma_1$ テハ
 $\text{homology } 0$ ナラズ、今、 Σ_2 ハ $S^3 - \Sigma_1$ ノ Interior Menge, 故ニマ
 シテ Σ_2 テ $\text{homology } 0$ トハナラズ、

同称ニ続ケテ n 個ノ境界 h_1, \dots, h_n トスレバ

$$p^0 = 1, \quad p^1 = \sum h_i, \quad p^2 = n - 1, \quad p^3 = 0,$$

$p^2 = n - 1$ ニ Seifert ノ式 $p^1 = p^2 - (n - 1) + \sum h_i$ ヲ得ル、以上、

茲ニ問題カ生ズル、 $p^1 = \sum h_i$ トナルニ次元集合体ハ上ニ得ラレタモ
 ノニ限ルカト云フ、テ下ニ、是ハ Heegaard Diagramm カラ閉集合体ヲ構成
 スル問題、Alexander ノ Vermutung 等ノ困難ナ問題ニ歸着スル、

次ニ前ノ Seifert ノ定理ヲ $(2n+1)$ 次元ニ拡張スル、

定理 2. 境界 p 個ノ $(2n+1)$ 次元可符号集合体 M_1^{2n+1} ノ一次元ベッチ数 p^1 ハ

境界ヲナス n 個ノ $2n$ 次元開集合体ノ一次元ベッチ数 p_i^1 トスルトキ

$$p^1 \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} p_i^1,$$

証明. M_1^{2n+1} は homeomorph + 集合体 M_2^{2n+1} より境界に對應スル處
ヲ等シイト考ヘルト開集合体 M^{2n+1} が生スル. Verdopplung.

ソノ時, Euler-Poincaré'sche Charakteristikヲ作ルト

$$2\chi(M_1^{2n+1}) - \chi_{\text{Rd}}(M_1^{2n+1}) = \chi(M^{2n+1}) = 0,$$

$$p^0 - p^1 + p^2 - p^3 + \dots - p^{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \chi_i$$

$\chi_i = \pi$ の Rand 数, χ_i の Rand, Charakteristik. $p^{2n} \geq \pi - 1$,

$$(2) \quad p^1 - \pi + (-p^2 + p^3 - \dots + p^{2n-1}) \geq -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \chi_i.$$

ココマテハ Seifert (お説) ヲマシ,

今, $M^{2n+1} = \tau U$ ヲ応用スル, M^{2n+1} , Betti'sche Zahl q^p トスルバ

$$\begin{array}{l} (-1)^3 \left| \begin{array}{l} q^2 = 2p^2 - \sum_{i=1}^n p_i^2 + j^2 + j^1 \\ q^3 = 2p^3 - \sum p_i^3 + j^3 + j^2 \\ \vdots \\ (-1)^{2n} q^{2n-1} = 2p^{2n-1} - \sum p_i^{2n-1} + j^{2n-1} + j^{2n-2} \end{array} \right. \end{array}$$

Poincaré-Veblen, Dualitätssatz ヲ使フ事 = ヲツテ.

$$0 = 2(-p^2 + p^3 - \dots + p^{2n-1}) + j^{2n-1} - j^1 + \sum \chi_i - \sum p_i^0 - \sum p_i^{2n} + \sum p_i^1$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^1 - \pi + (-p^2 + p^3 - \dots + p^{2n-1}) + j^{2n-1} - j^1 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \chi_i$$

$$(2), (3) \text{ ヲ } p_1 - \frac{1}{2} \sum p_i^1 - j^{2n-1} + j^1 \geq 0,$$

此處ニテ Alexander, 振環カクテ Dualitätssatz ヲ用フ.

Pontrjagin: Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze
(Math. Ann. Bd. 105, S. 190)

Rand ヲ Komplex K トシ K 上ニ Zylinder, M^{2n+1} 上ニ homolog 0 トナル様ニ置ク

G_j , \times mit Division, $\forall \leq \gamma$ $G_j^* \text{トスレバ}$

$$G_j^2 \leftrightarrow G_j^{2n-2} \quad ; \quad G_j^{2^*} \leftrightarrow G_j^{2n-2}$$

M_1^{2n+1} , Rand K デアリ M^{2n+1} の Verdoppelung デ生ジタノタカラ $f^1 = f^{2n-1}$

$$p_1 \cong \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 \quad \text{以上}$$

定理 3. 閉 3次元集合体 M^3 , ベッチ数 $q^1 = q^2 = a$, トスレバ γ , 種数 $g \cong a$.

此, Heegaard Diagramm, 種数 g ハ (1) ヲリ

$$q^1 = 2g - 2g + f^1 + f^0$$

$f^0 = 0$, Heegaard Diagramm デ" = ツカヘルトキ f^2 , 最モ大キクナル

, ハ標準曲面, 結合レ分, 非デアル, \forall 故 $f^2 = a$ ナラバ Heegaard

Diagramm, 種数ハ少クモ a .

此処デ" $q^1 = a$ デ" $g = a$. デアル称ナ集合体ハ容易ニ作ル事ハ出来ル, 故

$$= g \cong a.$$

種数 g_1, g_2 , = ツ, 集合体ヲ一ツ, 3次元集合体ニラ結合スルトキ \forall

Summarmannigfaltigkeit カ如何ニナルカ, $g \cong g_1 + g_2$ デ"ハナイカトモ

思フカ是ガ言ヘラモ面白イ結果デアル, 又 $(2n+1)$ 次元, Heegaard Diagramm

= 定理 2 ヲ用キ定理 3 ノ称ナモ, ガ言ヘナイデラウカ, 又 nichtorientierbar

, Heegaard Diagramm = 對シテ如何ニナルカ,

(七月十四日)