

2. 或ル種ノ組合セ函數方程式 ニ就イテ

南雲道夫

今カラ十數年前ニ 東北數學雜誌、沖三卷ニ於テ 齋藤修三郎氏が
On some functional equations ト題サレテ 或ル種ノ組合セ函數
 方程式ヲバ ホボ統一的研究サレタ。然シナガラ數據比ハ 形式的ニ
 運算ヲ無反省ニホドコサレテ居ル、デ 論理ノ嚴密ヲ缺キ ナホ微積分ヲバ
 勝手ニ用ヒラレタ 筆者ハ之ニ對シ 約三年前ニ 共立社、續艱丘高等數
 學講座(雜錄) 氏ノ研究ノ特殊ナ場合ヲバ 只、連續性ヤ純單調性ノミヲ
 假定シテ論ジタ 所ニ數據氏ノ研究デハ

$$f(\varphi(x_1, \dots, x_l; y_1, \dots, y_m); z_1, \dots, z_n) \\ = g(x_1, \dots, x_l; \psi(y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_n))$$

ト云ウ函數方程式ガ基礎的ナ役目ヲシテ居ル (上ノ l, m, n ガ一般ニハ等シ
 リナイ事ガ 注目スベキ点デアル) 筆者ハ上ノ函數方程式ヲバ ナルベ
 キ一般ノ假定、下ニ於テ 連續群ノ問題ニ變換シテ見タ、デアル (ソノ方
 法ハ全ク *elementar* デアル)

扱テ函數方程式

$$(A) \quad f(\varphi(x, y), z) = g(x, \psi(y, z))$$

ニ於テ 各變數 x, y, z ハ夫々 X, Y, Z ナル三個、*metrische*
Räume = 屬スル任意ノ、莫トシ 函數 f, g, φ, ψ 、取ル値(?)ニ 或ル
 一ツ、*metrischer Raum* R 、莫デアルト假定スル (同一ノ R !)
 更ニ X, Y, Z, R “ *im Kleinen kompakt* ト假定スル

次 = 方程式 $f(r, z) = r'$ 及 $g(x, r) = r'$ ($r' \in R$)

ハ夫々 (聯立 = プラズ 各別々 =) $r =$ ツイテハ 常 = 一義的 = 解 x ヲ z
 $=$ ツイテハ 多義的 或ハ 一義的 = 解ケルモノトスル

又方程式 $\varphi(x, y) = r$ 及 $\psi(y, z) = r$ ($r \in R$)

モ夫々 (各、別々 =) x, y, z ノイヅレニツイテモ 多義的 或ハ 一義的 = 解
ケルモノト仮定スル

尚ホ函数 f, g, φ, ψ ハスベテ ソノ定義サレタ範圍 ($x \in X, y \in Y, z \in Z, r \in R$) = 於テ連続 (勿論一義) 函数デアルト仮定スル

以上ノ仮定 = ヨリ結局 函数方程式 (A) ハ R デ定義サレタ連続群ノ組合セノ法則ヲ表ハス方程式

$$(B) \quad H(H(r, r'), r'') = H(r, H(r', r''))$$

= 変換サレル ($r, r', r'' \in R$) $H(r, r')$ ハ連続デアル

即チ $r = \alpha(x), r' = \beta(y), r'' = \gamma(z)$ ハ X, Y, Z ヲ R へ
一意連続写像 (逆ハ一意トキマラヌ) デ T_1, T_2 ハ R ヲ R 自身へ、可逆
的一意連続写像トシテ

$$(C) \quad \begin{aligned} f(r, z) &= H(T_1 r, \gamma(z)) & g(x, r') &= H(\alpha(x), T_2 r') \\ \varphi(x, y) &= T_1^{-1} H(\alpha(x), \beta(y)) & \psi(y, z) &= T_2^{-1} H(\beta(y), \gamma(z)) \end{aligned}$$

デアル 又 $H(r, r') = r''$ ハ R 内デ常 = r ヲ $r' =$ 付一義的 = 解ケル

(証明) 亦一段 (A) = 於テ $y = t$ ($t \in Y$) トオキ

$$\varphi(x, t) = \varphi_1(x), \quad \psi(t, z) = \psi_2(z) \quad \text{トオケバ}$$

$$f(\varphi_1(x), z) = g(x, \psi_2(z))$$

$\varphi_1(x)$ ヲ $\psi_2(x)$ ハ夫々 X, Y ヲ R へ一意連続写像デアル

$$(1) f(r, z) = h(r, \psi_2(z))$$

$$(2) g(x, r') = h(\varphi_1(x), r')$$

↑ル形 = f, g が表ハセル 但シ $h(r, r')$ ハ r, r' 、各々 = ツイテ、
連続一意函数デ ソノ逆モ一意連続デアール

所ガ $h(r, r')$ ハ R 、内部デ *im Kleinen* デ (r, r') = ツキ一様ニ
連続↑ル事ガ証明出来ルカラ $h(r, r')$ ハ (r, r') = ツイテ連続デアール

沖二段 (A) = 於テ $z = c$ トオキ $f(r, c) = T_1 r$ 及ビ
 $\psi(y, c) = \psi_1(y)$ トオケバ

$$(3) T_1 \varphi(x, y) = g(x, \psi_1(y)) = h(\varphi_1(x), \psi_1(y))$$

但シ T_1 ハ R ヲ R 自身ヘ、可逆一意連続写像デアッ $\psi_1(y)$ ハ Y ヲ R
ヘ、一意連続写像デアール

次 = (A) = 於テ $x = a$, $g(a, r') = T_2 r'$, $\varphi(a, y) = \varphi_2(y)$
トオケバ

$$(4) T_2 \psi(y, z) = f(\varphi_2(y), z) = h(\varphi_2(y), \psi_2(z))$$

但シ T_2 ハ R ヲ 其自身ヘ、可逆一意連続写像デ $\varphi_2(y)$ ハ Y ヲ R へ、
一意連続写像デアール

沖三段 (A) = 於テ $x = a$ $z = c$ トオケバ

$$(5) T_1 \varphi_2(y) = T_2 \psi_1(y)$$

トナル ヲコデ

$$h(T_1^{-1} r, T_2^{-1} r') = H(r, r')$$

$$T_1 \varphi_1(x) = \alpha(x) = r$$

$$T_2 \psi_1(y) = T_1 \varphi_2(y) = \beta(y) = r'$$

$$T_2 \psi_2(z) = \gamma(z) = r''$$

トオケバ結局 (A)ハ (1)(2)(3)(4)(5) = ヨツテ (B) トナリ、 f, g, φ, ψ
 ハ (C) ナル形 = アラハセル $H(\gamma, \gamma')$ 、連続性ナ α, β, γ 、一意連続
 性ナドモ 容易 = ワカル事デアル

之デ証明ハ了ツタ

数藤氏、場合 = 於ケル如ク X, Y, Z ガ \mathbb{R} ヨリモ高次元、空間 (\mathbb{R} ヲ
 有限ナ次元、空間トスル中) トシテ 此ノ問題ヲ利用シテ種々ナ函数方程式
 ナ連続群ノ問題 = 変換スル事ガ出来ルデアロウ 筆者ハ読者ト共 =
 ソノ問題 = 向ツテ オモムロ = 歩ヲ進メント欲シテ居マス 又此ノ問題ハ
 X, Y, Z ガ discrete ナ集合事デアツテモ勿論同様 = 成立スル

以上 六月三十日