

# 現代幾何学への道

## 多様な世界の統一理解

糟谷久矢

大阪大学

2021年11月6日  
高校生のための公開講座

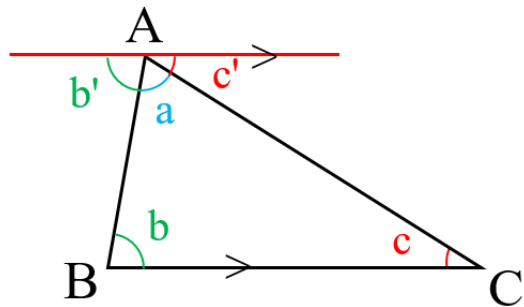
# 第一部

ユークリッドの幾何学以外にも色々な幾何学がある!

# 平面地球



# ユークリッドの幾何

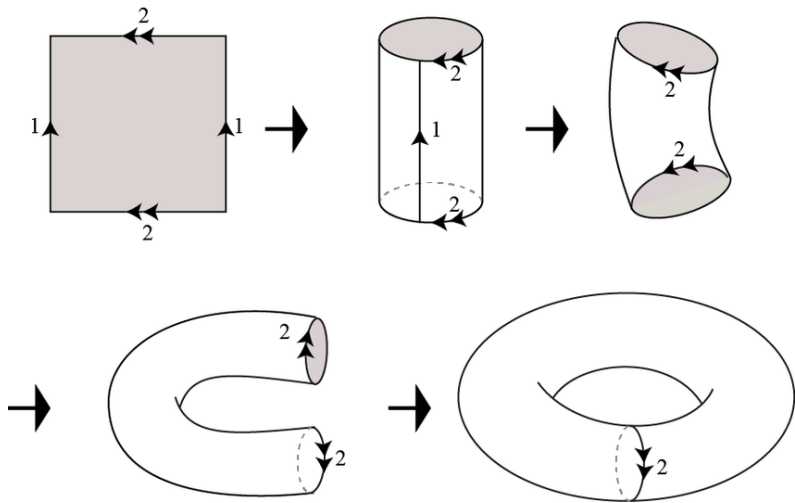


# 昔のRPG風世界



<https://yousakana.jp/dq-google/> より引用

# トーラス

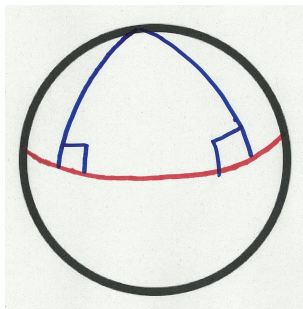


# 地球



Wikimages による Pixabay からの画像

# 球面幾何学

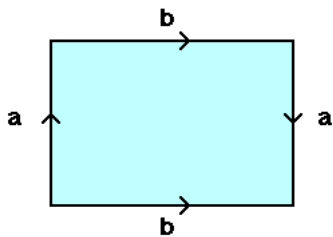




# クラインのツボ



# クラインのツボ



# 絵(写真)の中の世界

## 多様な世界の統一理解

続ける階段が存在する！三角形の内角の和は180度ではない！止まって見ても動いて見ても光の速さは変わらない！方一つで幾何学が変わる。今まで習ってきた幾何学のアプローチが必要だ。内側と外側の区別がつかない容器<sup>®</sup>クラインのツボである天才数学者クラインは、23才の時に「エルランゲンラム」として新しい幾何学のあり方を提示した(当時、クライすでにドイツのエルランゲン大学の教授だった)。  
考え方を参考にして、多様な幾何学の世界の理解の仕方よう。

2021年11月6日(土) 入場開始13:00~  
13:30~15:00

糟谷 久矢 先生(大阪大学)

理学部E棟4階 E404  
大セミナー室

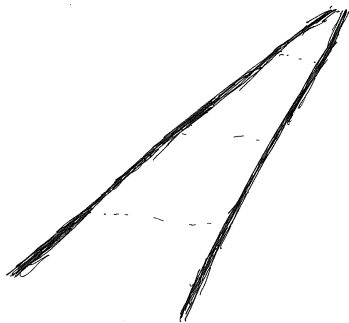
※満席の場合サテライト会場E301にご案内します。

理学研究科 数学専攻事務室  
E-mail : kouhou@math.sci.osaka-u.ac.jp

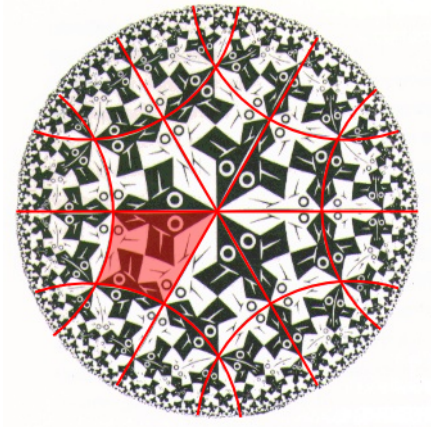
必要です。参加希望の方は右記にて登録をお願いします。また、無料オンライン配信も行います。QRのURLをお送りします。



# 射影幾何学

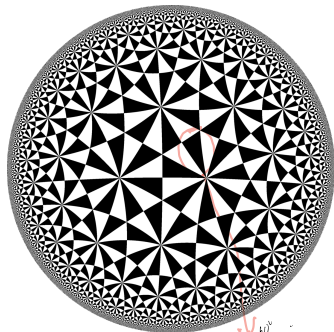


## 絵の中の世界2



<https://web.colby.edu/thegeometricviewpoint/2016/12/21/tessellations-of-the-hyperbolic-plane-and-m-c-escher/>

# 双曲幾何学



$\angle < 180^\circ$   
 $\angle < 90^\circ$

三角形の内角は  $180^\circ$  より小さくなる!

ユークリッドの幾何学について"幾何学とは何か"(公理)を考える  
だけでも一苦勞...

色々な幾何学ごとに"幾何学とは何か"を考えてたら大変!!

色々な幾何学を統一的に扱いたい!

## 第二部

幾何学的性質は主群の変換に対する不変性により特徴付けられる。(クライン『エルランゲンプログラム』)



"幾何学=世界+変換の"固まり(群)"  
変換で変わらないもの(同じもの)を見つけよう!

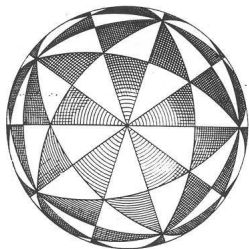


世界は同じでも変換が変われば幾何学が変わる.

- ▶ (ユークリッドの幾何) 世界=平面 (紙), 変換群=回転と平行移動  
⇒ 三角形の合同の研究  
長さが不変 (変わらないもの) 性
- ▶ 世界=平面 (紙), 変換群=回転と平行移動と等倍  
⇒ 三角形の相似の研究
- ▶ 世界=平面 (紙), 変換群=線形変換 (行列) と平行移動 (まっすぐということが不変性である幾何学)  
⇒ 全ての三角形が同じ。

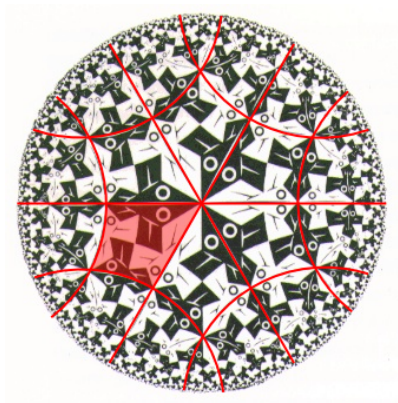
# 球面幾何学

世界=球面 (地球), 変換群=球の運動 (回転)



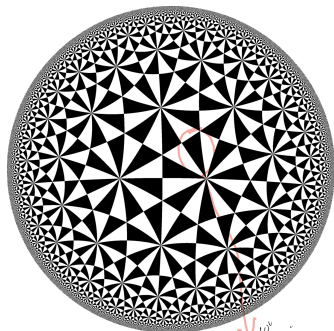
# 双曲幾何学

世界=円盤, 変換群=メビウス変換 (円と直線が写りあう変換)



全て同じ鳥 (魚?)

# 双曲幾何学

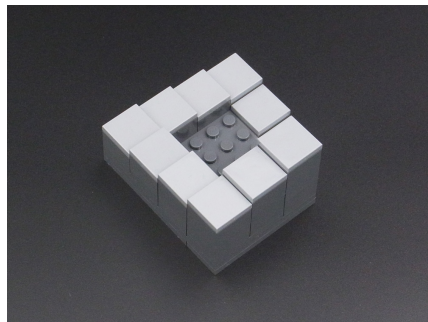


$\downarrow$   
H  
 $\angle = 25^\circ 25' 11''$

全ての三角形は合同 (三辺の長さは等しい)!!

# 射影幾何学

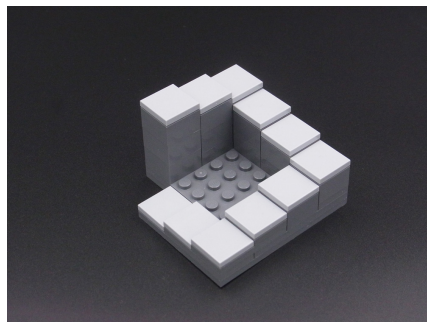
世界=みている世界, 変換群=視点が変わる



<https://www.brickers.jp/?mode=f69> より

# 射影幾何学

世界=みている世界, 変換群=視点が変わる



<https://www.brickers.jp/?mode=f69> より

# 物理学

- ▶ 少し古い物理学 (力学, ニュートン)  
世界=時空 (私たちが生きる時間と空間),  
変換群=運動 (時間や距離が不変な変換)
- ▶ 新し目の物理学 (相対性理論, アインシュタイン)  
世界=時空 (私たちが生きる時間と空間),  
変換群=ローレンツ変換 (時間や距離は変わるが、光の速さは不変な変換)

# 研究成果

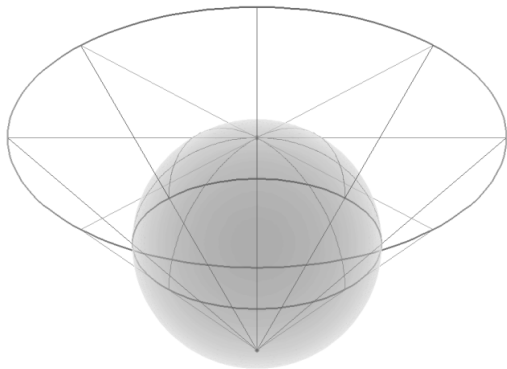
## 定理 (ポアンカレの一意化定理. 1907)

2次元の距離を不変性とする幾何学 (リーマン幾何学) を考えることは, 以下の三つの幾何学のうちの一つを考えることと"同じ"である

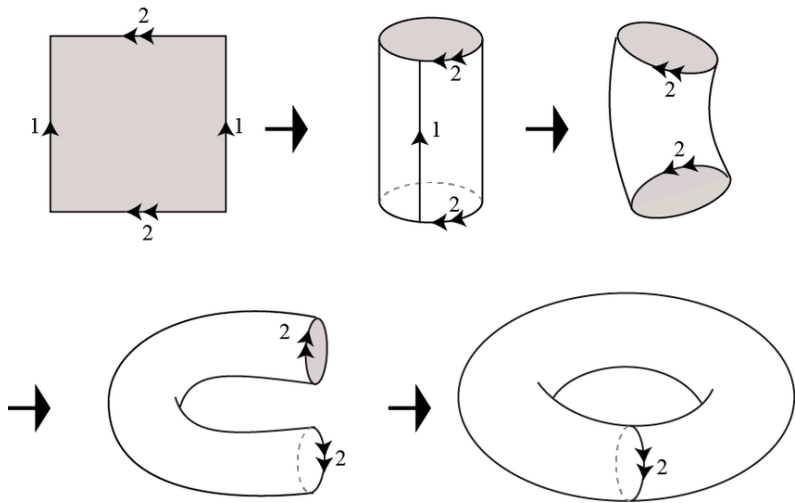
- ▶ 球面幾何学  
世界=球面 (地球), 変換群=球の運動 (回転)
- ▶ 平面 (ユークリッド) 幾何学  
世界=平面 (紙), 変換群=回転と平行移動
- ▶ 双曲幾何学  
世界=円盤, 変換群=メビウス変換 (円と直線が写りあう変換)

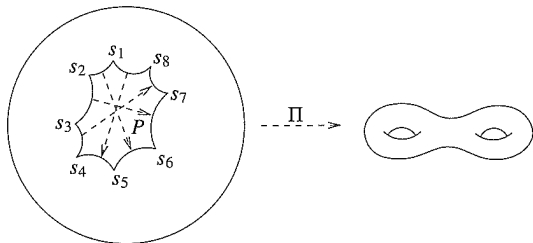


# 射影幾何学 $\leftrightarrow$ 球面幾何学



# トーラス $\leftrightarrow$ 平面幾何学





# 100年の難問”ポアンカレ予想”

3次元の幾何学でもそうかも？



ポアンカレ

# 解決

定理 (サー斯顿の幾何化. ペレルマン 2003)

3次元の幾何学は 8つの幾何学 (世界 + 変換群) からわかる。

# まとめ

- ▶ 紙の上だけではない色々な幾何学がある。地球は丸い。
- ▶ 幾何学=世界+変換 (クライン), 変換で変わらないものを見つけよう。

## もっと知るためのキーワード

- ▶ 多様体 (世界)
- ▶ リーマン計量 (定規とコンパス)
- ▶ リー群 (変換群)



## 参考文献

"ユークリッド原論" 追補版 共立出版

ヒルベルト "幾何学の基礎" クライン "エルランゲン・プログラム"  
(現代数学の系譜 7) 共立出版

"線形代数と群の表現 I II" 平井 武 すうがくぶっくす 20, 21 朝倉  
書店