

2027 年度（令和 9 年度）大学院入試

数 学 問 題 B

実施日時

2026 年（令和 8 年）8 月 19 日（水）

13:30～16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない。
- 配布物は問題冊子，答案用紙 3 枚，下書き用紙 3 枚である。
答案用紙，下書き用紙ともに追加配布はしない。
- 問題冊子は表紙も入れて 7 枚，問題は全部で 6 問である。
- 6 問の中からちょうど 3 問を選択して解答すること。解答開始の指示があつてから，下の欄に，受験番号，氏名を記入し，選択した問題の番号を○で囲め。

受験番号	氏名					
選択問題番号						
	1	2	3	4	5	6

- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙 1 枚に記入すること。
答案用紙の裏面に記入してもよい。
- 解答開始の指示があつてから，それぞれの答案用紙と下書き用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入せよ。
- 解答は日本語または英語で記入すること。
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない。

[1] G を群とする. H を G の部分群として, H の指数 $n = [G : H]$ が有限な値であるとする.

- (1) $g \in G$ に対し, $g^k \in H$ となる $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ が存在することを示せ.
- (2) G の正規部分群 N で, $N \subset H$ かつ $[G : N] \leq n!$ をみたすものが存在することを示せ.
- (3) G が有限群であるとして, G の位数を $|G|$ と表す. 素数 p が $|G|$ の最小の素因数であるとする. $n = p$ ならば H は G の正規部分群であることを示せ.

[2] p を素数, $\mathbb{F}_p$ を位数 p の有限体, $\mathbb{F}_p[x]$ および $\mathbb{F}_p[y]$ をそれぞれ x, y を変数とする $\mathbb{F}_p$ 上の一変数多項式環とする. 環 $\mathbb{F}_p[x]$ の自己同型写像 σ を $\sigma(f(x)) = f(x+1)$ と定める. $\mathbb{F}_p[x]$ の部分環 R を

$$R = \{f(x) \in \mathbb{F}_p[x] \mid \sigma(f(x)) = f(x)\}$$

とし,

$$\phi(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1) \in \mathbb{F}_p[x]$$

とする.

- (1) $\phi(x) \in R$ および $\phi(x) = x^p - x$ を示せ.
- (2) $f(x) \in R$ の次数が 1 以上とする. このとき $f(x)$ の次数は p 以上であることを示せ.
- (3) $f(x) \in R$ を $\phi(x)$ で割ったときの商と余りを $q(x), r(x)$ とするとき, $q(x), r(x) \in R$ を示せ.
- (4) 環準同型写像 $\rho : \mathbb{F}_p[y] \rightarrow R$ を $y \mapsto \phi(x)$ により定める. ρ が全射であることを示せ.

[3] 複素 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{C}^2$ の座標を z_1, z_2 とし, $\mathbb{C}^2$ の部分集合 X_1, X_2, X_3 を次により, それぞれ定義する:

$$X_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 z_2 = 0\},$$

$$X_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 z_2 (z_1 + z_2 + 1) = 0\},$$

$$X_3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 z_2 (z_1 + z_2 + 1)(z_1 + 3z_2 + 2) = 0\}.$$

複素 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{C}^2$ の部分集合 X_1, X_2, X_3 に相対位相を入れてそれぞれ位相空間とする.

- (1) X_1 は可縮であることを示せ.
- (2) X_2 の整係数ホモロジー群 $H_k(X_2; \mathbb{Z})$ をすべての $k \geq 0$ について求めよ.
- (3) X_3 の整係数ホモロジー群 $H_k(X_3; \mathbb{Z})$ をすべての $k \geq 0$ について求めよ.

[4] 3次元実射影空間を $\mathbb{RP}^3$ とする. $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ の点 (x_1, x_2, x_3, x_4) が定める $\mathbb{RP}^3$ の点を $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ とする. $\mathbb{RP}^3$ の部分集合 N を

$$N = \{(x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{RP}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0\}$$

によって定義する.

- (1) N は $\mathbb{RP}^3$ の閉集合であることを示せ.
- (2) N は $\mathbb{RP}^3$ の2次元 C^∞ 級部分多様体であることを示せ.
- (3) N はトーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ と C^∞ 級微分同相であることを示せ.

[5] $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする.

(1) $E_n \in \mathcal{M}$ ($n = 1, 2, \dots$) が $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ をみたすとき

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = 0, \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k^c\right) = \mu(X)$$

が成り立つことを示せ. ここで $E_n^c = X \setminus E_n$ である.

(2) f_n ($n = 1, 2, \dots$) を $\mathcal{M}$ -可測関数の列とする. 定数 $1 \leq p < \infty$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ をみたす正数の列 ε_n ($n = 1, 2, \dots$) が存在して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{-p} \int_X |f_n(x)|^p d\mu < \infty$$

とする. このとき μ に関して X 上でほとんど至るところ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ であることを示せ.

[6] $\mathbb{R}^n$ 上のルベーク可積分な実数値関数 f に対し, そのフーリエ変換 $\mathcal{F}[f]$ を

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

により定義する. ただし i は虚数単位であり, $x \cdot \xi$ は x と ξ の標準内積である.

(1) $\mathcal{F}[f](\xi)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の有界連続関数であることを示せ.

(2) f は $\mathbb{R}^n$ 上でコンパクトなサポートをもつ C^1 級関数とする. このとき, 各 $j = 1, \dots, n$ に対して,

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right](\xi) = i\xi_j \mathcal{F}[f](\xi)$$

を示せ.

(3) $u_1, \dots, u_n$ は $\mathbb{R}^n$ 上でコンパクトなサポートをもつ n 個の C^1 級関数で,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j}(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

をみたすとする. このとき, 各 $j = 1, \dots, n$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_j(x) dx = 0$$

を示せ.