

2027 年度（令和 9 年度）大学院入試

数 学 問 題 A

実施日時

2026 年（令和 8 年）8 月 19 日（水）

9:00～12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない。
- 配布物は問題冊子，答案用紙 4 枚，下書き用紙 4 枚である。
答案用紙，下書き用紙ともに追加配布はしない。
- 問題冊子は表紙も入れて 5 枚，問題は全部で 4 問である。
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙 1 枚に記入すること。
答案用紙の裏面に記入してもよい。
- 解答開始の指示があってから，それぞれの答案用紙と下書き用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入せよ。
- 解答は日本語または英語で記入すること。
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない。

[1] 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^3$ が収束するとする. また関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は, ある定数 $C > 0$ に対して

$$|f(x) - x| \leq C|x|^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

をみたすとする.

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ が収束することと $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することとは同値であることを示せ.

(2) $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ とするとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(b_n)$ は収束することを示せ.

[2] m, n を正の整数として、複素数を成分とする $m \times n$ 行列全体からなる複素ベクトル空間を $M_{m,n}(\mathbb{C})$ で表す. A を m 次複素正方行列として、 B を n 次複素正方行列とする. B は n 個の相異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ をもつとする.

(1) $\mathbb{C}^n$ を n 次元複素列ベクトルからなるベクトル空間とする. 各 $i = 1, \dots, n$ に対し、 $v_i \in \mathbb{C}^n$ を固有値 λ_i に属する B の固有ベクトルとする. このとき $v_1, \dots, v_n$ は線形独立であることを示せ.

(2) 線形写像 $f : M_{m,n}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{C})$ を $f(X) = AX - XB$ で定義する. 次の条件 (a) と (b) は同値であることを示せ.

(a) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ のいずれも A の固有値ではない.

(b) f は線形同型写像である.

[3] コンパクトなハウスドルフ空間 Y の開部分集合 X に相対位相を入れて位相空間とする. 位相空間 X の部分集合 U の X における閉包を $\overline{U}^X$ とする.

(1) Y の部分集合 A がコンパクト集合であることと A が Y の閉集合であることは同値であることを示せ.

(2) Y の点 y と Y の閉集合 F に対して, $y \notin F$ ならば, Y の開集合 G, H が存在して,

$$y \in G, F \subset H, G \cap H = \emptyset$$

をみたすことを示せ.

(3) 任意の $x \in X$ に対して, x を含む X の開集合 U で $\overline{U}^X$ が Y のコンパクト集合となるものが存在することを示せ.

(4) X が Y の部分集合としてコンパクトではないとする. Y における X の補集合 $Y \setminus X$ が一点のみからなるとき, X は Y において稠密であることを示せ.

[4] u は $0 < |u| < 1$ をみたす複素数の定数として, $f(z)$ を次により定める:

$$f(z) = \frac{\pi}{(u+z)^2 \sin(\pi z)}$$

正の整数 N に対して,

$$D_N = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, |x| \leq N + \frac{1}{2}, |y| \leq N + \frac{1}{2} \right\}$$

とおき, D_N の境界を反時計回りに一周する閉曲線を Γ_N とする. ここで, i は虚数単位である.

- (1) 複素平面 $\mathbb{C}$ における $f(z)$ の全ての極と, それぞれの極での留数を求めよ.
- (2) N に依存しない定数 $C > 0$ があり, $z \in \Gamma_N$ ならば,

$$|\sin(\pi z)| \geq C$$

が成立することを示せ.

- (3) 次の式を示せ.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_N} f(z) dz = 0$$

- (4) 次の式を示せ.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n}{(u+n)^2} = \frac{\pi^2 \cos(\pi u)}{\sin^2(\pi u)}$$