2025年度（令和7年度）大学院入試

数学問題B

実施日時

2024年（令和6年）8月21日（水）

13:30〜16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて7枚，問題は全部で6問である．
- 6問の中からちょうど3問を選択して解答すること．下の欄に，受験番号，氏名を記入し，選択した問題の番号を○で囲め．

受験番号	氏名

選択問題番号						
	1	2	3	4	5	6

- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙1枚に記入すること．答案用紙の裏面に記入してもよい．
- それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること．
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[1] 以下の問いに答えよ．

(1) G を群，1 を G の単位元とする．任意の元 $g \in G \setminus \{1\}$ の位数が 2 となるならば，G はアーベル群であることを示せ．

(2) 群 G の指数 2 の部分群 H は正規部分群であることを示せ．

(3) 位数 8 の有限群を，同型の違いを除いてすべて求めよ．

[2] ℓ を素数とし，実数体 $\mathbb{R}$ の部分環 R_ℓ を $R_\ell = \{a + b\sqrt{\ell} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ で定める．以下の問いに答えよ．

(1) 環同型 $R_\ell \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 - \ell)$ が存在することを示せ．ただし，$\mathbb{Z}[X]$ は X を変数とする整数係数 1 変数多項式環を表す．

(2) R_7 のイデアル $(2 + \sqrt{7}, 3)$ は素イデアルであることを示せ．

(3) 以下の条件 $(*)$ をみたす 3 以上の素数 p を決定せよ．

$(*)$ 正の整数 n および体 $K_1, \ldots, K_n$ であって，$R_\ell/(p)$ と $K_1 \times \cdots \times K_n$ が環として同型となるものが存在する．

[3] 3 次元球面

$$\mathbb{S}^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$$

上の実数値関数 f を $f(x, y, z, w) = xyzw$ で定める．以下の問いに答えよ．

(1) f の臨界点（微分 df_p が恒等的に 0 である点 $p \in \mathbb{S}^3$）をすべて求めよ．

(2) f の最大値と最小値を求めよ．

[4] 実 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分位相空間 X を

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0,\ z = 0\}$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) X 上に，正の実数 t で $(x_1, y_1, z_1) = t(x_2, y_2, z_2)$ となるものが存在するときに $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ とすることで，同値関係 $\sim$ を定める．この同値関係 $\sim$ による商位相空間 $X/\sim$ には C^∞ 級多様体の構造が入ることを示せ．

(2) 整係数ホモロジー群 $H_0(X), H_1(X), H_2(X)$ を求めよ．

[5] 以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^2 級関数 v で，

$$\begin{cases} v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ (v(0), v'(0)) = (0, 1) \end{cases}$$

を満たすものを求めよ．

(2) $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数 f に対して，$\mathbb{R}$ 上の実数値 C^2 級関数 u が

$$\begin{cases} u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = f(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \\ (u(0), u'(0)) = (0, 0) \end{cases}$$

を満たすとき，(1) の v を用いて

$$u(t) = \int_0^t v(t-s) f(s)\, ds \quad (t \in \mathbb{R})$$

と表されることを示せ．

(3) (2) の f がさらに C^1 級であって，$\lim_{t\to\infty} f'(t) = 0$ を満たすとする．このとき，(2) の u について，

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ u(t) - \frac{1}{2} f(t) \right\} = 0$$

が成り立つことを示せ．

[6] X を空でない集合，$\mathcal{F}$ を X 上の σ-加法族とし，f を X 上の非負の $\mathcal{F}$-可測関数とする．$0 < c < 1$ を定数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上の測度 μ は

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > t\}) = (1 + ct)e^{-t}, \quad t > 0$$

を満たすとする．このとき，積分 $\displaystyle\int_X f(x)\, d\mu(x)$ の値を求めよ．

(2) (1) の μ について，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{nf(x)}{n + f(x)}\, d\mu(x)$ を求めよ．

(3) $n \in \mathbb{N}$ に対し，可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上の測度 μ_n は

$$\left(1 + ct - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leq \mu_n(\{x \in X \mid f(x) > t\}) \leq \left(1 + ct + \frac{t^2}{n}\right) e^{-t}, \quad t > 0$$

を満たすとする．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{nf(x)}{n + f(x)}\, d\mu_n(x)$ を求めよ．