2025 年度（令和 7 年度）大学院入試

数 学 問 題 A

実施日時

2024 年（令和 6 年）8 月 21 日（水）

9:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて５枚，問題は全部で４問である．
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙１枚に記入すること．
  答案用紙の裏面に記入してもよい．
- それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること．
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[1] f は閉区間 $[0,1]$ 上の非負実数値連続関数，M を f の最大値とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f(x)^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = M$$

を示せ.

[2] 整数 $n \geq 1$ に対して，複素数を成分とする n 次正方行列全体のなす複素ベクトル空間を $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ で表す．また，$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ を正則行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ の部分空間 $V = \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ の次元を求めよ．ただし，$\mathrm{tr}(X)$ は行列 X のトレースである．

(2) 線形写像 $f_A \colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ を $f_A(X) = A^{-1}XA$ で定義する．このとき，(1) の V について，$f_A(V) = V$ を示せ．

(3) A が対角化可能であるとき，(2) の f_A について，$\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ の基底で f_A の表現行列が対角行列となるものが存在することを示せ．

[3] X, Y, Z を位相空間とする．以下の問いに答えよ．

(1) 直積位相空間 $X \times Y$ から X への射影 $\pi\colon X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$ を考える．$X \times Y$ の任意のコンパクト部分集合 K に対して，$\pi(K)$ は X のコンパクト部分集合であることを示せ．

(2) ハウスドルフ空間の任意のコンパクト部分集合は閉集合であることを示せ．

(3) X, Y はハウスドルフ空間であるとし，$f\colon Z \to X$ を固有な連続写像，$g\colon Z \to Y$ を連続写像とする．連続写像 $h\colon Z \to X \times Y$ を $h(z) = (f(z), g(z))$ で定めるとき，h は固有であることを示せ．ただし，位相空間 A から位相空間 B への連続写像 Φ について，B の任意のコンパクト部分集合 K の逆像 $\Phi^{-1}(K)$ が A のコンパクト部分集合となるとき，Φ は固有であるという．

[4] i を虚数単位とする．$0 < a < 1$ を定数とし，複素数平面 $\mathbb{C}$ から非負の実軸を除いた領域 $D = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ において，複素関数

$$f(z) = \frac{\exp((a-1)\log z)}{z+1}, \quad z \in D$$

を考える．ただし $\log z$ は，正の実数 x に対して $\log x$ で通常の実数値の自然対数をあらわすとき，

$$\log z = \log r + i\theta, \quad z = re^{i\theta},\ r > 0,\ \theta \in (0, 2\pi)$$

を満たす対数関数の分枝である．以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ の極と，極での留数を求めよ．

(2) $r > 0$ と $\varepsilon \in (0, \pi)$ に対して曲線 $C(r, \varepsilon)$ を

$$C(r,\varepsilon)\colon z = re^{i\theta}\ (\varepsilon \le \theta \le 2\pi - \varepsilon)$$

で定める． 極限

$$\lim_{r\to 0}\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C(r,\varepsilon)} f(z)\,dz\right)$$

を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx$ の値を計算せよ．