2024 年度（令和 6 年度）大学院入試

数学問題 A

実施日時

2023 年（令和 5 年）8 月 23 日（水）

9:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて 5 枚， 問題は全部で 4 問である．
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙 1 枚に記入すること．
  答案用紙の裏面に記入してもよい．
- それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること．
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[1] a, b は $a < b$ をみたす実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が $n \to \infty$ のとき関数 $F(x)$ に $[a, b]$ 上で一様収束するならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b F(x)\, dx$$

となることを示せ．ただし，$F(x)$ が $[a, b]$ 上で連続になることは認めてよい．

(2) $g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ 上で定義された実数値連続関数で，$x \in [a, b]$ に対して

$$0 < g(x) < 1$$

をみたすならば，関数を項とする級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} g(x)^k$ は区間 $[a, b]$ 上である関数に一様収束することを示せ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \int_1^3 \frac{x^k}{(1+x)^k}\, dx$ を計算せよ．

[2] F を体，V を F 上の有限次元ベクトル空間，$T\colon V \to V$ を線形写像とする．正の整数 k が存在して T の k 回合成写像 $T^k = \overbrace{T \circ \cdots \circ T}^{k}$ が零写像となるとき，T をべき零という．以下の問いに答えよ．

(1) λ が T の固有値であるとき，λ^2 は T^2 の固有値であることを示せ．

(2) T がべき零のとき，その固有値は全て 0 になることを示せ．

(3) $F = \mathbb{C}$ (複素数体) とする．T の固有値が全て 0 ならば，T はべき零になることを示せ．

(4) $F = \mathbb{R}$ (実数体) とする．T が 0 以外の実数を固有値としてもたないとき，T はべき零になるかどうかを理由をつけて答えよ．

[3] 以下の (1), (2), (3) それぞれが, 任意の位相空間 X, Y および任意の連続写像 $f\colon X \to Y$ について成立するか否か, 理由をつけて答えよ.

(1) X の任意のコンパクト集合 K に対して，$f(K)$ は Y のコンパクト集合である.

(2) X の任意の連結集合 K に対して，$f(K)$ は Y の連結集合である.

(3) X の任意のコンパクト集合 K と，X の任意の閉集合 A に対して，$K \cap A$ は X のコンパクト集合である.

[4] i を虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) $a \in \mathbb{C}$ とする．複素関数 $f(z)$ が $z = a$ で正則ならば $\dfrac{f(z)}{(z-a)^2}$ の $z = a$ における留数は $f'(a)$ となることを示せ．

(2) 複素関数 $\dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ のすべての極と，それぞれの極での留数を求めよ．

(3) $R > 0$ に対して曲線 C_R を

$$C_R\colon z = Re^{i\theta} \ (0 \leq \theta \leq \pi)$$

で定める．

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\, dz = 0$$

となることを示せ．

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx$ の値を計算せよ．