2018年度（平成30年度）大学院入試

数学問題B

実施日時

2017年（平成29年）8月23日（水）

13:30〜16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて7枚，問題は全部で6問である．
- 6問の中から ちょうど3問 を選択して解答すること．下の欄に，受験番号，氏名を記入し，選択した問題の番号を○で囲め．

受験番号	氏名

選択問題番号						
	1	2	3	4	5	6

- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙1枚に記入すること．答案用紙の裏面に記入してもよい．
- それぞれ の答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号 を記入すること．
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

[1] 実数を係数とする 1 変数 x の多項式全体のなす環を $\mathbb{R}[x]$ であらわす.

(1) a, b を $a^2 - 4b < 0$ となる実数とする. 多項式 $x^2 + ax + b$ で生成されるイデアルによる $\mathbb{R}[x]$ の剰余環 $\mathbb{R}[x]/(x^2 + ax + b)$ は, 複素数体と同型であることを示せ.

(2) I を $\mathbb{R}[x]$ のイデアルとする. 多項式の次数に注目することにより, 多項式 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ で I が $f(x)$ で生成されるようなものが存在することを示せ.

(3) 実ベクトル空間として 2 次元となるような $\mathbb{R}[x]$ の剰余環を, 同型の違いを除いてすべて求めよ.

[2] G を有限群とする．ただし，G の位数は 2 以上であるとする．群 G の部分群 H は，$G \neq H$ で，$G \supsetneqq K \supsetneqq H$ となる部分群 K が存在しないとき，G の極大部分群という．G のすべての極大部分群の共通部分を $\Phi(G)$ であらわす．以下の設問では G の単位元を e であらわす．

(1) $\Phi(G)$ は G の正規部分群であることを示せ．

(2) 生成元と関係式で定まる群

$$G = \left\langle a, b \;\middle|\; a^4 = b^2 = e,\ bab^{-1} = a^{-1} \right\rangle$$

を考える．G は有限群であることを示せ．

(3) (2) で定めた群 G について，$\Phi(G) \neq \{e\}$ であることを示せ．

(4) G はアーベル群とする．$\Phi(G) \neq \{e\}$ であるための必要十分条件を求めよ．ただし，有限アーベル群の基本定理は証明なしに用いてよい．

[3] M をコンパクト C^∞ 多様体, X を M 上の C^∞ 級ベクトル場とする. M 上の C^∞ 級関数 $f, g \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ が $Xf = g$ かつ $Xg = f$ をみたすとする.

(1) X の任意の積分曲線 $\gamma \colon \mathbb{R} \longrightarrow M$ に対し,

$$(f \circ \gamma)''(t) = (f \circ \gamma)(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

が成り立つことを示せ. ただし, $(f \circ \gamma)''(t)$ は $(f \circ \gamma)(t)$ の t に関する 2 次導関数とする.

(2) f, g は共に恒等的に 0 であることを示せ.

[4] $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$ 上に，0 でない実数 r で $(x,y,z) = (rx', ry', rz')$ となるものが存在するときに $(x,y,z) \sim (x',y',z')$ とすることで，同値関係 $\sim$ を定める．$\mathbb{R}^3$ に通常の位相を入れ，$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ を同値関係 $\sim$ で割って得られる位相空間を X とする．また，点 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ の同値類が定める X の点を $[x:y:z]$ であらわす．

(1) X には 2 次元 C^∞ 多様体の構造が入ることを示せ．

(2) 写像 $F\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$F([x:y:z]) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(xy, yz, zx)$$

で定める．(1) で定めた X の C^∞ 多様体の構造について，F は C^∞ 級のはめ込みかどうか，理由を付けて答えよ．

(3) 写像 $G\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^4$ を

$$G([x:y:z]) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x^2+2y^2+3z^2, xy, yz, zx)$$

で定める．(1) で定めた X の C^∞ 多様体の構造について，G は C^∞ 級のはめ込みかどうか，理由を付けて答えよ．

[5] $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の複素数値急減少関数全体のなす集合

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; \text{任意の非負整数 } k, l \text{ に対して } \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^l \frac{d^k}{dx^k} f(x) \right| < \infty \right\}$$

とする．また，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し，そのフーリエ変換 $\mathcal{F}[f]$ を

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

により定義する．ただし i は虚数単位とする．以下の設問では $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とする．

(1) $G_\delta(x)$ を $G_\delta(x) = e^{-\delta x^2}$, $\delta > 0$ で定める．$K_\delta(\xi) = \mathcal{F}[G_\delta](\xi)$ を求めよ．また，

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) K_\delta(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\xi) G_\delta(\xi)\, d\xi$$

を示せ．

(2) $K_\delta(x)$ を (1) で求めたものとする．

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) K_\delta(x)\, dx = \sqrt{2\pi} f(0)$$

を示せ．また，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \mathcal{F}[f](\xi)\, d\xi$$

が成り立つことを示せ．

(3) f, g の合成積を $(f * g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\, dy$ で定義する．等式

$$\mathcal{F}[(f * g)](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)\mathcal{F}[g](\xi)$$

を利用して

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}[f](\xi)|^2\, d\xi$$

を示せ．

[6] 実数値の未知関数 $u(x)$ についての 2 階線形常微分方程式

$$u''(x) + f(x)u(x) = 0 \qquad \cdots\cdots \quad (*)$$

を考える．ただし，$'$ は x に関する微分をあらわし，$u''(x) = (u'(x))'$ とする．ここで，係数 $f(x)$ は実数値連続関数で

$$f(x+1) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

をみたすとする．

(1) $(*)$ の解のうち，初期条件 $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ をみたすものを $v_1(x)$，初期条件 $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ をみたすものを $v_2(x)$ とする．このとき，実数を成分とする 2 次正方行列 M で，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{pmatrix} v_1(x+1) & v_2(x+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \end{pmatrix} M$$

をみたすものが存在することを示せ．

(2) (1) における M の行列式 $\det M$ を求めよ．

(3) (1) における M のトレース $\operatorname{tr} M$ について，$|\operatorname{tr} M| < 2$ であるとする．$(*)$ をみたす任意の C^2 級関数 $u(x)$ について

$$\sup_{x>0} \bigl(|u(x)| + |u'(x)| \bigr) < \infty \qquad \cdots\cdots \quad (**)$$

が成り立つことを示せ．

(4) (1) における M のトレース $\operatorname{tr} M$ について，$|\operatorname{tr} M| > 2$ であるとする．$(*)$ をみたす C^2 級関数 $u(x)$ で，$(**)$ をみたさないものが存在することを示せ．