1

数学専攻入学試験 (2008.11.22. 10:00 – 12:00)

問題は全部で4問である．解答には，問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること．答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

問題1． 実数全体の集合 $X = \mathbb{R}$ の位相を次のように定める．X の閉集合全体は，空集合，X 自身，および X の有限部分集合全体から成るとする．このとき次の問いに答え，その理由を述べよ．

(1) X は連結か？
(2) X は Hausdorff 空間か？
(3) X はコンパクトか？

問題2． 4次正方行列

$$N = \begin{pmatrix} 10 & 11/2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & -10 & 0 \\ 10 & -25/6 & -11/2 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して，線形写像 $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ を

$$f_k(v) = N^k v, \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

で定め，その像 $W_k = \operatorname{Im} f_k$ を考える．ただし N^0 は4次の単位行列とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) 行列 N^2 および N^4 を計算せよ．
(2) $\mathbb{R}^4$ に属するベクトル v で，$\{v, Nv, N^2v, N^3v\}$ が $\mathbb{R}^4$ の基底となるものが存在することを示せ．
(3) 各 $k = 1, 2, 3, 4$ に対して，$W_k \subset W_{k-1}$ かつ $W_k \neq W_{k-1}$ を示せ．

問題3． R を，$R>2$ をみたす実数とする．複素平面 $\mathbb{C}$ において，実軸上で $-R$ から R まで進み，そのあと R から $-R$ まで原点を中心とする半径 R の円の上半分に沿って進むことにより $-R$ に戻ってくる向き付けられた閉曲線を C_R とし

$$I = \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^4+5z^2+4}\,dz,$$
$$J = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+5x^2+4}\,dx$$

とおく．ただし $i=\sqrt{-1}$ とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) 複素線積分 I を求めよ．
(2) 広義積分 J を求めよ．

問題4． $\mathbb{R}^2$ の各点 (x,y) を $f(x,y)=(u(x,y),v(x,y))\in\mathbb{R}^2$ に写す C^1 級写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が，任意の $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ に対して，条件

$$\max\{|u_x(a,b)|,|u_y(a,b)|,|v_x(a,b)|,|v_y(a,b)|\} \le c$$

をみたすと仮定する．ただし c は点 (a,b) の選び方によらない正定数で $c<1/2$ をみたすとする．また各 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ に対し，$\|(a,b)\|=\sqrt{a^2+b^2}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ を $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[0,1]$, で表される1対1の C^1級写像で，γ による区間 $[0,1]$ の像が，2点 $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ を結ぶ線分となっているものとする．このとき次を示せ．

$$|u(\gamma(1))-u(\gamma(0))|$$
$$\le \int_0^1 \sqrt{u_x(\gamma(t))^2+u_y(\gamma(t))^2}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$$

(2) 任意の $P,Q\in\mathbb{R}^2$ に対して $\|f(P)-f(Q)\|\le 2c\|P-Q\|$ を示せ．
(3) P_0 を $\mathbb{R}^2$ の1点とし，点列 $\{P_n; n=0,1,2,\dots\}$ を

$$P_{n+1} = f(P_n), \qquad n=0,1,2,\dots,$$

で定める．この点列が $\mathbb{R}^2$ の収束点列であることを示せ．